

FÍSICA CLÁSICA Y VECTORIAL

**Propone conceptos y ejercicios de interés práctico para un
aprendizaje significativo de los alumnos**



AUTORES:

Dr. Eddie Alcívar Castro, Mg.

Dr. Luis Ronquillo Triviño, PhD.

Ing. Gema Michelle Alcívar Vera

Ing. Orley Loor Solorzano, Mg.



Editorial Libro Mundo 2021

Este texto ha sido revisado por lectores pares evaluadores

Consejo Editorial Externo

*Dr. Medardo Mora Solorzano – Ec.
Dr. Luis Abelardo Ronquillo Armas – Ec.
Dr.C. Luis Aníbal Alonso Betancourt – Cu.
Dr. Omar Villota Pantoja – Colombia
Dr.C . Prudencio Leyva Figueredo – Cuba
Dra. Leticia Mendoza Tauler– Cuba
Ing. Carlo Alonso Cano Gordillo, Mg. – Pe.*

Consejo Editorial Interno

*Dr. Leonardo Moreira Delgado, PhD.– Ec.
Lic. Pablo Barreiro Macías, Mg.– Ec.
Dr. Roberth Piloso Cedeño, PhD. – Ec.
Dr. Washington Zambrano V., PhD.– Ec.
Dr. Johnny Saulo Villafuerte, PhD. – Ec.
Lic. Luis Eduardo Chávez, Mg. – Ec.
Lic. Cecilia Luzardo Villafuerte, Mg. – Ec.*

Consejo Literario Senior

*Dr. Galo Holguín Rangel – Ec.
Dra. Damia Mendoza, PhD. – Ec.
Dra. María Manuela Macías – Ec.
Dra. Rossy Alarcón Chávez – Ec.
Dra. Anita Rivera Solorzano– Ec.*

Consejo Estudiantil Universitario

*Julissa Zambrano – Ec.
Jessica García – Ec.
Alex Cahuasqui – Ec.
Juny Mera – Ecuador
Adriana Zambrano – Ec.
Nicole González – Ec.
Luz María Andrade – Ec.
Kevin Barreto – Ec.
Grace Katamary Pacheco – Ec.*

ISBN: 978-9942-8883-6-5



FÍSICA CLÁSICA Y VECTORIAL

Autores:

*Dr. Eddie Alcívar Castro, Mg.
Dr. Luis Ronquillo Triviño, PhD.
Ing. Gema Michelle Alcívar Vera
Ing. Orley Loor Solorzano, Mg.*

ISBN: 978-9942-8883-6-5

Primera edición 2021

Editorial Libro Mundo

Dirección Editorial:

Dr. Luis Ronquillo Triviño, PhD.

leronquillo@gmail.com

593 999 627 123

Manta – Manabí – Ecuador

Prólogo

La física clásica y vectorial proporcionan un fundamento apropiado para maestros y estudiantes de todas las áreas científicas, a la hora de empezar los estudios de un semestre en la universidad, debido a nuestras experiencias como docentes universitarios consideramos el estudio de distintas unidades y prácticas de laboratorio, él estudiante aplicara de forma experimental los conceptos aprendidos de forma teórica y con ello afianzarlos firmemente en su vida profesional.

La actividad experimental basada en un marco teórico bien estructurado ha demostrado ser el método más eficiente para entender los conceptos correspondientes a los fenómenos naturales particularmente en el área de las ciencias básicas y la educación. Para realizar las prácticas propuestas en el libro, él estudiante deberá utilizar herramientas didácticas que lo acerque de alguna manera hacer ciencia.

La física al igual que otras ciencias contribuye a la formación de individuos con una concepción científica del mundo; instruidos y preparados para la utilización creadora de los conocimientos en la solución de problemas prácticos. Gran importancia, en este sentido, se le concede al aprendizaje de conceptos, ya que éstos constituyen la forma fundamental del pensamiento, permiten la comprensión de los distintos fenómenos, así como conocer su esencia, ya que la interiorización de los conceptos es un proceso que exige comprender la relación que guarda la palabra que contiene el concepto con su significado.

Este libro ha sido creado, con la finalidad de contribuir a los maestros y estudiantes en el interés del estudio de la física, de un modo mediante el cual puedan recurrir al texto para adquirir un aprendizaje de la física clásica y vectorial, a través de los conceptos, prácticas de laboratorio y ejercicios resueltos en cada una de las unidades.

El texto comienza capítulo 1 introducción al lenguaje técnico de la física, el capítulo 2 unidades, cantidades físicas y vectores, el capítulo 3 movimiento de los cuerpos en una dimensión, el capítulo 4 movimiento en dos o en tres dimensiones, el capítulo 5 leyes del movimiento, capítulo 6 equilibrio de un cuerpo rígido bajo la acción de fuerzas concurrentes y coplanares, y el capítulo 7 trabajo, energía y potencia.

Dr. Eddie Alcívar Castro, Mg.

FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Longitud 1 m = 100 cm = 1000 mm = $10^6 \mu\text{m}$ = 10^9 nm 1 km = 1000 m = 0,6214 milla (mi) 1 m = 3,281 pies (ft) = 39,37 pulgada (in) 1 cm = 0,3937 in 1 in. = 2,540 cm 1 ft = 30,48 cm 1 yd = 91,44 cm 1 mi = 5280 ft = 1,609 km 1 Ångstrom (Å) = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm 1 milla náutica = 6080 ft 1 año luz = $9,461 \times 10^{15} \text{ m}$ Área $1 \text{ cm}^2 = 0,155 \text{ in}^2$ $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10,76 \text{ ft}^2$ $1 \text{ in}^2 = 6,452 \text{ cm}^2$ $1 \text{ ft} = 144 \text{ in}^2 = 0,0929 \text{ m}^2$ Volumen 1 litro = $1000 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 0,03531 \text{ ft}^3 = 61,02 \text{ in}^3$ $1 \text{ ft}^3 = 0,02832 \text{ m}^3 = 28,32 \text{ litros} = 7,477 \text{ galones}$ 1 galón = 3,788 litros Tiempo 1 min = 60 s 1 h = 3600 s 1 d = 86.400 s 1 año = 365,24 d = $3,156 \times 10^7 \text{ s}$ Ángulo $1 \text{ rad} = 57,30^\circ = 180^\circ/\pi$ $1^\circ = 0,01745 \text{ rad} = \pi/180 \text{ rad}$ 1 revolución = $360^\circ = 2 \pi \text{ rad}$ rev/min (rpm) = 0,1047 rad/s Rapidez $1 \text{ m/s} = 3,281 \text{ ft/s}$ $1 \text{ ft/s} = 0,3048 \text{ m/s}$ $1 \text{ mi/min} = 60 \text{ mi/h} = 88 \text{ ft/s}$ $1 \text{ km/h} = 0,2778 \text{ m/s} = 0,6214 \text{ mi/h}$ $1 \text{ mi/h} = 1,466 \text{ ft/s} = 0,4470 \text{ m/s} = 1,609 \text{ km/h}$ $1 \text{ furlong/14 días} = 1,662 \times 10^{-4} \text{ m/s}$	Aceleración $1 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ cm/s}^2 = 3,281 \text{ ft/s}^2$ $1 \text{ cm/s}^2 = 0,01 \text{ m/s}^2 = 0,03281 \text{ ft/s}^2$ $1 \text{ ft/s}^2 = 0,3048 \text{ m/s}^2 = 30,48 \text{ cm/s}^2$ $1 \text{ mi/h} \cdot \text{s} = 1,467 \text{ ft/s}^2$ Masa $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 0,0685 \text{ slug}$ $1 \text{ g} = 6,85 \times 10^{-5} \text{ masa (slug)}$ $1 \text{ slug} = 14,59 \text{ kg}$ $1 \text{ kg} = 2,205 \text{ lb}$ Fuerza $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0,2248 \text{ lb}$ $1 \text{ lb} = 4,448 \text{ N} = 4,448 \times 10^5 \text{ dinas}$ Presión $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1,450 \times 10^{-4} \text{ lb/in}^2 = 0,209 \text{ lb/ft}^2$ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ $1 \text{ lb/in}^2 = 6895 \text{ Pa}$ $1 \text{ lb/ft}^2 = 47,88 \text{ Pa}$ $1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1,013 \text{ bar} = 14,7 \text{ lb/in}^2 = 2117 \text{ lb/ft}^2$ $1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ torr} = 133,3 \text{ Pa}$ Energía $1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergs} = 0,239 \text{ cal}$ $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J (con base en caloría de } 15^\circ)$ $1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 1,356 \text{ J}$ $1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J} = 252 \text{ cal} = 778 \text{ ft} \cdot \text{lb}$ $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ $1 \text{ kWh} = 3,600 \times 10^6 \text{ J}$ Equivalencia masa-energía $1 \text{ kg} \leftrightarrow 8,988 \times 10^{16} \text{ J}$ $1 \text{ u} \leftrightarrow 931,5 \text{ MeV}$ $1 \text{ eV} \leftrightarrow 1,074 \times 10^{-9} \text{ u}$ Potencia $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ $1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$ $1 \text{ Btu/h} = 0,293 \text{ w}$
---	--

CONSTANTES FÍSICAS FUNDAMENTALES

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz	c	$2,99792458 \times 10^8$ m/s
Magnitud de carga del electrón	e	$1,60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6,6742(10) \times 10^{-11}$ N.m ² /kg ²
Constante de Planck	h	$6,6260693(11) \times 10^{-34}$ J. s
Constante de Boltzmann	k	$1,3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6,0221415(10) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de los gases	R	8,314472(15) J/mol.K
Masa del electrón	m_e	$9,1093826(16) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1,67262171(29) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1,67492728(29) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A.m

Fuente: National Institute of Standards and Technology (<http://physics.nist.gov/cuu>). Los números entre paréntesis indican incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1,6454(21) significa $1,6454 \pm 0,0021$. Los valores que no indican incertidumbre son exactos.

DATOS ASTRONÓMICOS

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Radio de la órbita (m)
Sol	$1,99 \times 10^{30}$	$6,96 \times 10^8$	---
Luna	$7,35 \times 10^{22}$	$1,74 \times 10^6$	$3,84 \times 10^8$
Mercurio	$3,30 \times 10^{23}$	$2,44 \times 10^6$	$5,79 \times 10^{10}$
Venus	$4,87 \times 10^{24}$	$6,05 \times 10^6$	$1,08 \times 10^{11}$
Tierra	$5,97 \times 10^{24}$	$6,38 \times 10^6$	$1,50 \times 10^{11}$
Marte	$6,42 \times 10^{23}$	$3,40 \times 10^6$	$2,28 \times 10^{11}$
Júpiter	$1,90 \times 10^{27}$	$6,91 \times 10^7$	$7,78 \times 10^{11}$
Saturno	$5,68 \times 10^{26}$	$6,03 \times 10^7$	$1,43 \times 10^{12}$
Urano	$8,68 \times 10^{25}$	$2,56 \times 10^7$	$2,87 \times 10^{12}$
Neptuno	$1,02 \times 10^{26}$	$2,48 \times 10^7$	$4,50 \times 10^{12}$
Plutón	$1,31 \times 10^{22}$	$1,15 \times 10^6$	$5,91 \times 10^{12}$

Fuente: NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (<http://ssd.jpl.nasa.gov>) y P. Kenneth Seidelmann, ed., Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), pp. 704-706. Para cada cuerpo, “radio” es el radio en ecuador y “radio de la órbita” es la distancia media desde el Sol (en el caso de los planetas) o desde la Tierra (en el caso de la Luna). En agosto de 2006 la Unión Astronómica Internacional reclasificó a Plutón y a otros pequeños objetos que giran en órbita alrededor del Sol como “planetas enanos”.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1.....	9
METAS DE APRENDIZAJE	9
1.1. La física y el método científico	10
1.1.1. Ramas de la Física clásica	11
1.1.2. Ramas de la Física moderna	12
1.1.3. La Física y su impacto en la tecnología.....	12
1.1.4. Historia de la Física	13
1.1.5. El método científico	15
1.2. Magnitudes físicas y su medición	18
1.2.1. Prefijos del Sistema Internacional	21
1.2.2. Conversión de unidades.....	22
1.2.3. El sistema inglés.....	23
1.3. Instrumentos de medición	25
1.4. Errores en la medición.....	26
1.5. Notación científica	28
1.5.1. Conversión de notación decimal a científica.....	29
1.5.2. Conversión de notación científica a decimal.....	30
1.5.3. Suma y resta de cantidades en notación científica	31
1.5.4. Multiplicación con notación científica	31
1.5.5. División con notación científica.....	32
CAPÍTULO 2.....	35
METAS DE APRENDIZAJE	35
2.1. Unidades.....	36
2.1.1. Estándares y unidades	36
2.1.2. Prefijos de unidades.....	38
2.1.3. Sistema Británico	38
2.2. Cantidades físicas	39

2.2.1. Estrategia para resolver problemas.....	39
2.3. Vectores.....	41
2.3.1. Coordenadas rectangulares.....	41
2.3.2. Coordenadas polares.....	42
2.3.3. Coordenadas geográficas.....	43
2.3.4. Resolución de triángulos rectángulos.....	45
2.4. Vectores en el plano.....	50
2.4.1. Clases de vectores.....	51
2.4.2. Descomposición de un vector en el plano.....	52
2.5. Operaciones con vectores.....	61
2.5.1. Suma de vectores.....	62
2.5.2. Diferencia de vectores.....	67
2.5.3. Multiplicación de un escalar por un vector.....	68
2.6. Producto de vectores.....	72
2.6.1. Producto escalar.....	73
2.6.2. Producto vectorial.....	76
2.7. Vector posición relativa.....	86
2.8. Espacio vectorial.....	90
CAPÍTULO 3.....	105
METAS DE APRENDIZAJE.....	105
3.1. Desplazamiento, tiempo y velocidad media.....	106
3.2. Velocidad instantánea.....	109
3.3. Movimiento rectilíneo uniforme.....	111
3.4. Aceleración.....	113
3.5. Movimiento con aceleración constante.....	119
3.6. Cuerpos con caída libre.....	127
3.7. Movimiento ascendente y descendente en caída libre.....	130
CAPÍTULO 4.....	141
METAS DE APRENDIZAJE.....	141

4.1. Vector posición y velocidad.....	142
4.2. Vector aceleración.....	145
4.3. Movimiento de proyectiles.....	153
4.4. Movimiento circular.....	160
4.4.1. Movimiento circular uniforme	162
4.4.2. Movimiento circular uniformemente acelerado	169
CAPÍTULO 5.....	185
METAS DE APRENDIZAJE	185
5.1. Fuerzas	186
5.2. Leyes del movimiento de Newton.....	188
5.2.1. Primera ley de Newton (Ley de inercia).....	188
5.2.2. Segunda ley de newton (Ley de fuerza)	189
5.2.3. Tercera ley de newton (Acción y reacción).....	190
5.3. Fuerza normal.....	194
5.4. Plano inclinado	196
5.5. Fuerza de rozamiento	197
5.6. Leyes de Kepler.....	208
5.7. Ley de la gravitación universal	209
CAPÍTULO 6.....	219
METAS DE APRENDIZAJE	219
6.1. Fuerzas concurrentes	220
6.1.1. Primera condición de equilibrio	220
6.2. Fuerzas coplanares	228
6.2.1. Condiciones de equilibrio de un sólido	229
CAPÍTULO 7.....	241
METAS DE APRENDIZAJE	241
7.1. Trabajo mecánico	242
7.2. Energía cinética y potencial	249
7.2.1. Energía cinética	250

7.2.2. Energía potencial gravitacional	251
7.3. Potencia mecánica	255
RESPUESTA A LOS EJERCICIOS	263
BIBLIOGRAFÍA.....	273

CAPÍTULO 1.

INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE TÉCNICO DE LA FÍSICA

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cuáles son las ramas de la física clásica y moderna
- Analiza la interrelación entre la física y su impacto en la tecnología en un contexto específico
- Identifica problemas de magnitudes físicas y realiza conversiones
- Demuestra las preconcepciones personales o comunes sobre diversos fenómenos naturales a partir de evidencias científicas
- Aplica soluciones de notación científica que sustentan los procesos para la solución de problemas cotidianos

1.1. La física y el método científico

Cuando alguien posee datos acerca de un hecho que ocurre en nuestro Universo, tiene el conocimiento sobre éste, por ejemplo: cómo funciona un motor, cómo resolver una ecuación, cómo se desplaza un automóvil o el movimiento de los planetas (Bedford, A.; Fowler, W. 1996).

Existen tres tipos de conocimientos:

Elementales

Información simple acerca de las propiedades de las cosas y sus relaciones. Por ejemplo, que los objetos tienen masa.

Empírico

Adquiridos por experiencia y limitados a la evidencia superficial de los hechos y su desarrollo. Por ejemplo, si suelto una piedra ésta se caerá al piso.

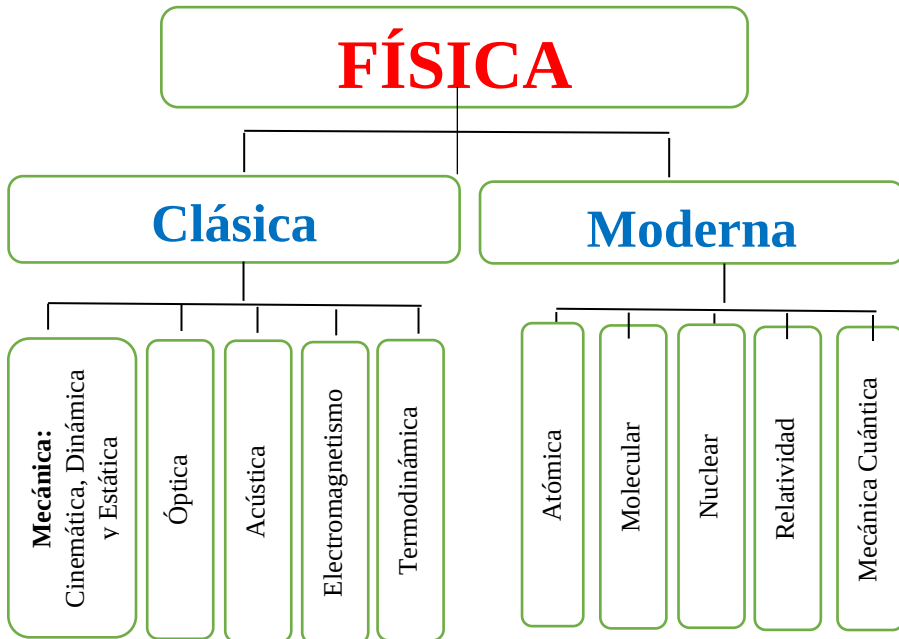
Científicos

Explica las relaciones generales, necesarias y constantes de los fenómenos. Por ejemplo, la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre los cuerpos.

Ciencia: proviene del latín *scientia*, “conocimiento”. Es el conjunto de conocimientos obtenidos mediante la observación de patrones regulares, del razonamiento y la experimentación en ámbitos específicos, a partir de los cuales se generan preguntas, se construyen hipótesis, se deducen principios y se elaboran leyes generales y sistemas organizados por medio de un método científico.

Física: del vocablo griego *physis* que significa “naturaleza”. Es la ciencia que estudia la materia y establece las leyes que explican los fenómenos que no modifican la estructura molecular o interna de los cuerpos.

Con el paso del tiempo, la Física ha evolucionado, hasta finales del siglo XIX era considerada como Física clásica y a partir del siglo XX como Física moderna. A continuación, se presenta un mapa conceptual con la clasificación de la Física y sus ramas:



1.1.1. Ramas de la Física clásica

Mecánica: es la rama de la física que estudia el movimiento de objetos y se subdivide en Cinemática (que considera la relación espacio - tiempo) y en Dinámica (que considera las causas).



Óptica: estudia los fenómenos asociados a la luz considerada como una onda.



Acústica: estudia el sonido, infrasonido, ultrasonido utilizando modelos que se apoyan de las Matemáticas.



Electromagnetismo: estudia los fenómenos asociados a la electricidad y al magnetismo describiendo las cargas eléctricas tanto en reposo como en movimiento.



Termodinámica: estudia cómo la energía se transforma en calor y su conversión en trabajo.



1.1.2. Ramas de la Física moderna

Física atómica: estudia los átomos en sus propiedades y comportamiento.

Física molecular: estudia los problemas relacionados con la estructura atómica de la materia y su interacción con el medio.

Física nuclear: estudia los núcleos atómicos, en sus propiedades y comportamiento.

Física relativista: considerado como un nuevo modelo físico, describe el universo utilizando como referencia la velocidad de la luz en todas sus ecuaciones.

Mecánica cuántica: estudia los fenómenos físicos en escalas microscópicas.

En lo que se refiere a la ciencia, la autoridad de un millar no es superior al humilde razonamiento, de una sola persona. “Galileo Galilei” (Baing, A.; Agustench, M. 2007).



1.1.3. La Física y su impacto en la tecnología

Con el estudio de las leyes de la Física, el ser humano pudo construir las herramientas de uso más común para hacer su vida más fácil: palas, martillos, agujas, puentes, muebles, tractores, autos, hasta llegar a tecnología avanzada, con la fabricación de los teléfonos celulares, el lanzamiento de satélites de telecomunicaciones espaciales; gracias a ello, puedes ver las imágenes de los partidos del mundial de fútbol casi

al instante en que sucede el juego, o con accionar un botón ponemos a funcionar la TV, el radio, etc. (Bedford, A.; Fowler, W. 1996).



1.1.4. Historia de la Física

Desde la Antigüedad las personas han tratado de comprender la naturaleza y los fenómenos que en ella se observan: el paso de las estaciones, el movimiento de los cuerpos y astros.

Las primeras explicaciones se basaron en consideraciones filosóficas sin realizar verificaciones experimentales.

En el siglo **XXV A. C.**, los egipcios hicieron una observación detallada de los astros y crearon un calendario solar.

En el siglo **XX A. C.**, los babilonios realizaron una división del camino del Sol en 12 partes, instaurando el zodiaco.

En el siglo **V A. C.**, los griegos imaginaron los elementos básicos que forman el Universo (agua, tierra, aire, fuego) y propusieron varios modelos cosmológicos (Baing, A.; Agustench, M. 2007).

En la época después de Cristo (D.C.)

En el siglo **XI**, Ptolomeo propuso que “la Tierra está en el centro del universo y alrededor de ella giran los astros” (teoría geocéntrica), que perduró cientos de años. También realizó un catálogo de estrellas y efectuó una descripción de los movimientos planetarios con epiciclos y deferentes.

En el siglo XVI hubo descubrimientos importantes:

- En **1543** Nicolás Copérnico sugiere el modelo heliocéntrico del Universo, con el Sol en el centro del Universo.
- En **1572** Tycho Brahe descubre una supernova en la constelación de Casiopea con un rudimentario telescopio.

En el siglo XVII se dieron descubrimientos muy importantes:

- En **1605**, Kepler logró calcular la órbita elíptica del planeta Marte y con ello estableció el referente para proponer sus leyes sobre el movimiento de los planetas.
- En **1609**, Galileo fue pionero en la experimentación para validar las teorías de la Física. Se interesó en el movimiento de los astros y de los cuerpos. Usando el plano inclinado descubrió la ley de la inercia de la dinámica y con el telescopio observó que Júpiter tenía satélites girando alrededor de él y también estudió la superficie de la Luna.
- En **1687**, Newton formuló las leyes clásicas de la dinámica (leyes de Newton), publicadas en su libro *Principia Matemática*, donde sienta las bases de la mecánica y la ley de la gravitación universal.

A partir del siglo **XVIII**, se desarrollan disciplinas como la termodinámica, la mecánica estadística y la Física de fluidos.

En el siglo XIX se producen avances fundamentales en electricidad y magnetismo

- En **1855** Maxwell creó la teoría del electromagnetismo, que considera la luz como una onda electromagnética.
- A finales de este siglo se producen los primeros descubrimientos sobre radiactividad, dando comienzo al campo de la Física nuclear, además de encontrar anomalías en la órbita de mercurio.
- En **1897** Thomson descubrió el electrón.

Durante el Siglo XX la Física se desarrolló

- En **1904**, se propuso el primer modelo del átomo.
- En **1905**, Albert Einstein formuló la teoría de la relatividad especial que coincide con las leyes de Newton para el caso de los fenómenos que se desarrollan a nivel partículas a velocidad de la luz.
- En **1911**, con experimentos para dispersar partículas, Rutherford concluyó que el núcleo atómico está cargado positivamente.
- Para **1915**, Einstein extendió su teoría de relatividad especial a la teoría de la relatividad general que explica la gravedad. Con ella se sustituyó la ley de la gravitación de Newton.
- En **1925**, Heisenberg, y en 1926, Schrödinger y Dirac formularon la Mecánica cuántica,
- En **1927**, Planck, Einstein, y Bohr entre otros, explicaron sus resultados anómalos en sus estudios experimentales sobre la radiación de cuerpos y con ello dieron paso al desarrollo de la teoría cuántica.
- En **1929** Edwin Hubble publicó sus observaciones sobre galaxias lejanas.



Isaac Newton

Dando origen al telescopio que actualmente nos envía las imágenes más actuales de otras galaxias.

En **1992**, la NASA, a través de la misión Cobe, describió las concentraciones de materia que habrían originado las estrellas y las galaxias. (Baing, A.; Agustench, M. 2007).

1.1.5. El método científico

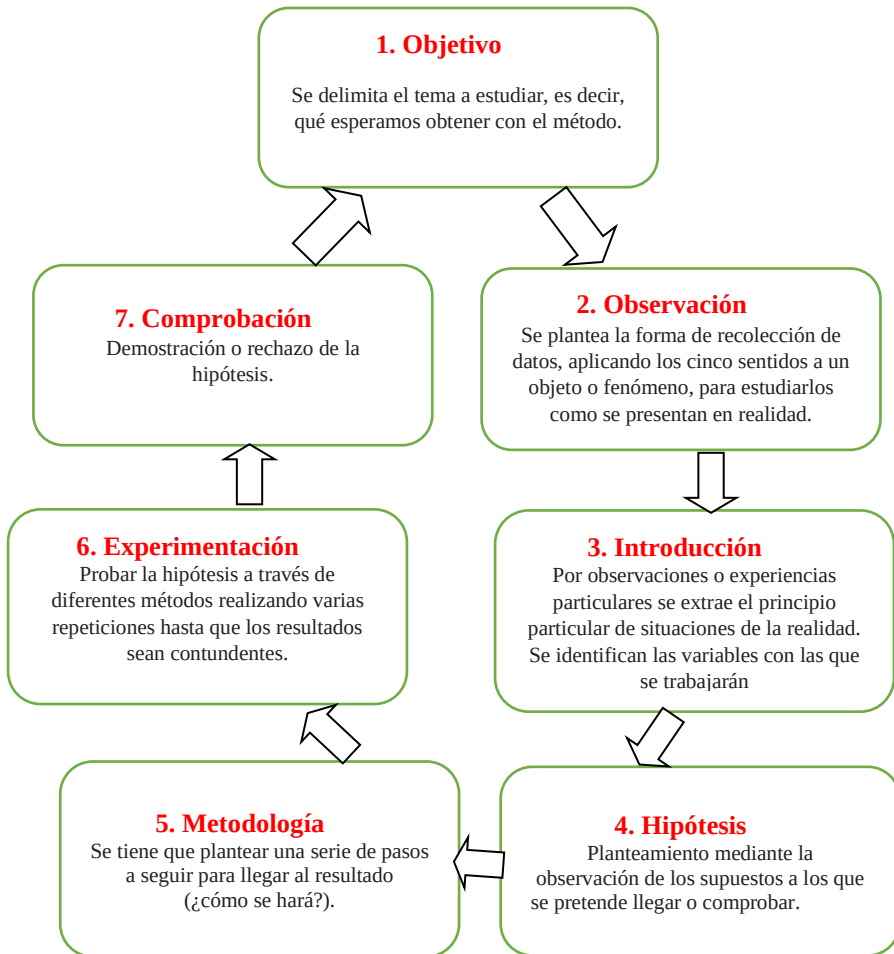
El método científico es el camino que se sigue para obtener conocimientos. Para este fin, se apoya en reglas y técnicas que se

perfeccionan para llegar a la luz de la experiencia y del análisis racional. En el proceso, cada paso nos acerca a la meta; sin embargo, las reglas no son infalibles y deben adaptarse en cada paso.”

Podemos realizar varias afirmaciones sobre el método científico:

- Es una forma de investigar que nace en el siglo XVII, con los trabajos realizados por Galileo Galilei, aunque previamente Leonardo Da Vinci, Nicolás Copérnico y Johannes Kepler analizaron su entorno con métodos parecidos.
- Es un método que siguiendo un orden establecido permite comprobar la veracidad de una idea. Con el método científico es posible comprobar una serie de planteamientos para determinar si una idea puede considerarse como válida o no.
- Es un método que demuestra leyes y que genera conocimiento que puede ser aplicado en diferentes ámbitos de la vida diaria, como idear herramientas para el campo, albañilería, mecánica, carnicerías, el comercio, etc.
- Es un método con el que se pueden obtener leyes que explican el funcionamiento de la naturaleza para aplicarlas en beneficio de la humanidad.

Pasos del método científico



En el proceso de la investigación científica se utilizan dos tipos de procedimientos:

Empírico: Va más allá del simple reporte de observaciones.

- Promueve un ambiente para una mejor comprensión.
- Combina una amplia investigación con un estudio de caso detallado.
- Demuestra la relevancia de la teoría, trabajando en un ambiente real (contexto).

Racional: Elabora hipótesis para relacionar dos fenómenos.

- Utiliza la inducción, ya que consiste en formular un concepto o una ley universal en función de los casos singulares que se han observado.
- Se vale de la deducción, ya que infiere soluciones o características concretas a partir de leyes o definiciones universales.
- Maneja analogías, ya que infiere relaciones o consecuencias semejantes en fenómenos parecidos.

1.2. Magnitudes físicas y su medición

Para comprender y estudiar la naturaleza que le rodeaba, el hombre utilizó sus sentidos: el tacto, la vista, el gusto, etc., pero como éstos son limitados (por ejemplo no percibían el mundo microscópico) o distorsionaban o deformaban la realidad, como los espejismos, la sensación de caliente y frío, etc., tuvo que inventar aparatos para ampliar sus sentidos; así desarrolló instrumentos de medición, los cuales le ayudaron a percibir con mayor confiabilidad y claridad el mundo material que le rodeaba.

En la antigüedad, para medir utilizaban las partes del cuerpo humano como la mano, el codo, los brazos, el palmo o la cuarta y hasta el pie, debido a que las unidades de medición no estaban totalmente prescritas para aquella época. En países de habla inglesa se tomaban estas medidas con base en el cuerpo del rey vigente. En nuestra época, en Estados Unidos se utilizan la pulgada y el pie como unidades de medición.

Medir: es comparar una magnitud con otra de la misma especie, que de manera arbitraria o convencional se toma como base, unidad o patrón de medida. (Pérez, H. 2013)

Al medir siempre intervienen tres aspectos:

- Lo que se mide.
- El aparato o instrumento de medición.
- Las unidades de medida del sistema establecido.

Las mediciones pueden hacerse de forma directa o indirecta. Lo hacemos de manera directa cuando medimos la altura de una persona con una cinta métrica, cuando tomamos el tiempo que alguien dura sumergido debajo del agua o al llenar una taza o una cuchara de un ingrediente al momento de seguir una receta. Medimos de manera indirecta cuando tomamos la temperatura de una persona con fiebre, cuando calculamos la velocidad de un vehículo o la distancia entre la tierra y la luna, etc.

Magnitud: es todo aquello que puede ser medido, como el tiempo, la longitud, la masa, el área, el volumen, la densidad, la fuerza, etc. y se representa con un número y una unidad.

Magnitudes fundamentales: son aquellas que se definen con un número y una unidad y sirven de base para obtener las demás magnitudes utilizadas en la física. (Pérez, H. 2013)

Las unidades básicas fundamentales del sistema métrico decimal son:

- De longitud, el metro (**m**).
- De masa, el kilogramo (**kg**).
- De tiempo, el segundo (**s**).

De ahí que también se le denomina sistema de unidades (**MKS**) por metro, kilogramo y segundo.

Las siete unidades fundamentales del (**SI**) se presentan en la siguiente tabla con el símbolo correspondiente:

Magnitud fundamental	Unidad patrón	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

Ejemplos de magnitudes: la longitud de una tabla (que puede ser el largo, el ancho, la altura, su profundidad, el espesor), la masa de una piedra, el tiempo transcurrido en un evento, el volumen de una cubeta, el área de una lámina de aluminio, la velocidad a la que corre una persona, la fuerza con que es golpeado un auto en un choque, etc.

Ejemplo de magnitudes derivadas: se expresan en términos de dos o más magnitudes fundamentales, son el área (dos unidades de longitud), el volumen (tres unidades de longitud), la velocidad (longitud y tiempo), la aceleración (longitud y tiempo al cuadrado), la fuerza (masa, longitud y tiempo al cuadrado), el trabajo (masa, longitud y tiempo al cuadrado), etc. En 1881, en el Congreso Internacional, realizado en París Francia, y a propuesta del científico alemán Karl Friedrich Gauss, se adoptó un sistema llamado absoluto: el sistema cegesimal, donde las magnitudes fundamentales y sus unidades de medida son:

- De longitud, el centímetro (**cm**).
- De masa, el gramo (**g**).
- De tiempo, el segundo (**s**).

De las siglas de centímetro, gramo y segundo se derivó su nombre como *Sistema (CGS)* y fue utilizado para expresar cantidades pequeñas. En la actualidad el sistema de medición que utilizamos es el SI. En la siguiente tabla se encuentran algunas de las magnitudes fundamentales y derivadas de uso más frecuente, así como su equivalencia en el sistema CGS y el sistema inglés (Bueche, J. 2015).

Magnitud	Sistema Internacional SI	Sistema Cegesimal CGS	Sistema Ingles
Longitud	metro (m)	centímetro (cm)	pie (ft)
Masa	kilogramo (kg)	gramo (g)	libra (lb)
Tiempo	segundo (s)	segundo (s)	segundo (s)
Área o superficie	m ²	cm ²	ft ²
Volumen	m ³	cm ³	ft ³
Velocidad	m/s	cm/s	ft/s
Aceleración	m/s ²	cm/s ²	ft/s ²
Fuerza	kg m/s ² = N (Newton)	g cm/s ² = D (Dina)	lb ft/s ² = poundal
Trabajo y energía	N.m = J (Joule)	Dina.cm = erg	poundal pie
Presión	N/m ² = Pa (Pascal)	D/ cm ² = Ba (Baria)	poundal/pie ²
Potencia	J/s = W (watt)	erg/s	poundal pie/s

1.2.1. Prefijos del Sistema Internacional

Además de las unidades básicas del sistema internacional (**SI**) (metro, kilogramo y segundo), también se pueden utilizar otras unidades como kilómetro, milímetro, nanosegundo, etc., donde los prefijos kilo, mili y nano denotan múltiplos o submúltiplos de la unidad patrón en potencias de 10. (Bueche, J. 2015).

Valor	Número	Prefijo	Símbolo	Se lee...
10 ¹²	1 000 000 000 000	Tera	T	Un billón
10 ⁹	1 000 000 000	Giga	G	Mil millones
10 ⁶	1 000 000	Mega	M	Un millón
10 ³	1 000	kilo	k	Mil
10 ²	100	hecto	h	Cien
10 ¹	10	deca	da	Diez
10 ⁰	1	Unidad básica	Metro (m) Gramo (g) Segundo (s)	Uno
10 ⁻¹	0,1	Deci	d	Décima
10 ⁻²	0,01	Centi	c	Centésima
10 ⁻³	0,001	Mili	m	Milésima
10 ⁻⁶	0,000001	Micro	μ	Millonésima
10 ⁻⁹	0,000000001	Nano	n	Mil millonésimas
10 ⁻¹²	0,000000000001	Pico	p	Billonésima

1.2.2. Conversión de unidades

Cuando se resuelven problemas de Física, a menudo las magnitudes de las cantidades están expresadas en diferentes unidades físicas. Por ejemplo, si en un problema la longitud de un objeto está expresada en metros y la queremos sumar con otra enunciada en kilómetros, para efectuar la operación es necesario que ambas cantidades estén expresadas en la misma unidad de medida, ya sea en metros o kilómetros. (Bueche, J. 2015).

En matemáticas, a este proceso se le conoce como conversión de unidades.

Ejemplo 1.

Si un libro tiene una longitud de 20,5 cm, ¿Cómo se expresa en metros esta longitud?

Solución

$$\left(\frac{20,5 \cancel{\text{cm}}}{1}\right) \left(\frac{1 \text{ m}}{100 \cancel{\text{cm}}}\right) = 0,205 \text{ m}$$

Ejemplo 2.

Si se compra en el supermercado $\frac{3}{4}$ de kg de tocino, ¿A cuántos gramos equivalen?

Solución

$$\left(\frac{0,75 \cancel{\text{kg}}}{1}\right) \left(\frac{1\,000 \text{ g}}{1 \cancel{\text{kg}}}\right) = 750 \text{ g}$$

Ejemplo 3.

¿Cuántos segundos equivalen a 32 minutos?

Solución

$$\left(\frac{32 \cancel{\text{min}}}{1}\right) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}}\right) = 1\,920 \text{ s}$$

Ejemplo 4.

Una mesa de cocina tiene un área de 15 200 cm² ¿A cuántos m² equivalen?

Solución

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$\left(\frac{15\,200 \cancel{\text{cm}^2}}{1} \right) \left(\frac{1 \text{ m}^2}{10\,000 \cancel{\text{cm}^2}} \right) = 1,52 \text{ m}^2$$

Ejemplo 5.

Una señora tiene un recipiente con $\frac{1}{2}$ kg de azúcar, pero su báscula solamente pesa en miligramos. ¿Cuál sería la equivalencia?

Solución

$$\frac{1}{2} \text{ kg} = 0,5 \text{ kg}$$

$$\left(\frac{0,5 \cancel{\text{kg}}}{1} \right) \left(\frac{1\,000 \cancel{\text{g}}}{1 \cancel{\text{kg}}} \right) \left(\frac{1\,000 \text{ mg}}{1 \cancel{\text{g}}} \right) = 500\,000 \text{ mg}$$

Ejemplo 6.

Un ciclista viaja a una velocidad de 30 km/h. ¿A cuántos m/s viaja el ciclista?

Solución

$$\left(\frac{30 \cancel{\text{km}}}{1 \cancel{\text{h}}} \right) \left(\frac{1\,000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \right) \left(\frac{1 \cancel{\text{h}}}{3\,600 \text{ s}} \right) = 8,33 \text{ m/s}$$

Ejemplo 7.

Se desea conocer cuántos litros le caben en una cisterna de una casa de 25 m de largo, 12,5 m de ancho y 1,3 m de profundidad

Solución

Multiplicando sus tres dimensiones, esto es, largo x ancho x profundidad = (25 m) (12,5 m) (1,3 m) = 406,25 m³

$$\left(\frac{406,25 \cancel{\text{m}^3}}{1} \right) \left(\frac{1\,000 \text{ l}}{1 \cancel{\text{m}^3}} \right) = 406\,250 \text{ l}$$

1.2.3. El sistema inglés

El sistema inglés, o también llamado sistema FPS (foot, pound, second – pie, libra, segundo), considera el peso como una cantidad física

fundamental y la masa como una cantidad física derivada (Cuéllar, C 2013).

Magnitud fundamental	Magnitud de medida en el sistema inglés	Unidad de medida en el SI	Unidad de medida en el CGS
Longitud	Pulgada (in)	0,0254 m	2,54 cm
	Pie (ft)	0,3048 m	30,48 cm
	Yarda (yd)	0,9144 m	91,44 cm
	Milla (mi)	1 609 m	
Masa	Libra (lb)	0,454 kg	454 g
	Onza (oz)	0,02835 kg	28,35 g
Tiempo	Galón (gal)	3,785 l	3 785 ml
	Onza líquida (fl oz)	0,0296 l	29,6 ml

Ejemplo 8.

Una persona que llega a un aeropuerto en Estados Unidos le cobran un sobrepeso en sus maletas, ya que su equipaje excedió en 24 lb del límite permitido. Esta persona tenía entendido que podía excederse 10 kg, ¿rebasó el límite?

Solución

1 lb = **0.454 kg**.

$$\left(\frac{24 \cancel{\text{lb}}}{1} \right) \left(\frac{0,454 \text{ kg}}{1 \cancel{\text{lb}}} \right) = \mathbf{10,896 \text{ kg}}$$

Ejemplo 9.

Una persona en Estados Unidos necesita colocar un vidrio de 1,8 m de largo por 0,9 m de ancho, pero al ir a comprarlo no sabe las medidas en pies. ¿Cuáles son esas medidas?

Solución

La relación entre pies y metros es 1 ft = **0,3048 m**

$$\left(\frac{1,8 \cancel{\text{m}}}{1} \right) \left(\frac{1 \text{ ft}}{0,3048 \cancel{\text{m}}} \right) = \mathbf{5,91 \text{ ft}}$$

$$\left(\frac{0,9 \cancel{\text{m}}}{1} \right) \left(\frac{1 \text{ ft}}{0,3048 \cancel{\text{m}}} \right) = \mathbf{2,95 \text{ ft}}$$

Ejemplo 10.

Una persona que vive en Estados Unidos necesita pintar su casa y requiere 25 litros de pintura. Al ir a comprarla, se da cuenta que las etiquetas de las cubetas vienen marcadas en galones, no en litros. ¿Cuántos galones necesita comprar para pintar su casa?

Solución

La relación entre galones y litros es $1 \text{ gal} = 3,785 \text{ lt}$

$$\left(\frac{25 \cancel{\text{ lt}}}{1} \right) \left(\frac{1 \text{ gal}}{3,785 \cancel{\text{ lt}}} \right) = \mathbf{6,61 \text{ gal}}$$

Ejemplo 11.

Una persona viaja en su automóvil de Estados Unidos a México a vacacionar. Su auto solamente marca mi/h, y entrando a México ve en la carretera que el límite de velocidad máxima es de 100 km/h. ¿A velocidad en mi/h necesita conducir para que no lo infraccionen?

Solución

La relación entre millas y kilómetros es $1 \text{ mi} = 1\,609 \text{ m} = 1,609 \text{ km}$

$$\left(\frac{100 \cancel{\text{ km}}}{h} \right) \left(\frac{1 \text{ mi}}{1,609 \cancel{\text{ km}}} \right) = \mathbf{62,15 \text{ mi/h}}$$

Ejemplo 12.

Una madre primeriza le dice el pediatra que le dé 2,8 oz de leche de soya a su bebé después de los de los seis meses, pero el biberón sólo marca en mililitros. ¿Cuál es la equivalencia?

Solución

La relación entre onzas y mililitros es $1 \text{ fl oz} = 29,6 \text{ ml}$

$$\left(\frac{2,8 \cancel{\text{ fl oz}}}{1} \right) \left(\frac{29,6 \text{ ml}}{1 \cancel{\text{ fl oz}}} \right) = \mathbf{82,88 \text{ ml}}$$

1.3. Instrumentos de medición

Actualmente sabemos que al momento de medir un objeto que es alterado o deformado en sus dimensiones, éstas se modifican. Para disminuir estos errores inevitables en las mediciones nos apoyamos en la matemática estadística y en la teoría del error.

Todas las mediciones tienen asociada una incertidumbre que puede deberse a los siguientes factores:

- La naturaleza de la magnitud.
- El instrumento de medición.
- El observador.
- Las condiciones externas.

Exactitud: se refiere a la proximidad entre el valor medido y el valor **verdadero** del objeto. Así pues, una medición es más exacta cuanto más pequeño es el error de medida.

Precisión: es el grado de certeza entre los valores medidos de un mismo objeto, en mediciones repetidas y en condiciones especificadas. Suele expresarse numéricamente mediante medidas de dispersión tales como la desviación estándar o la varianza (Álvarez, M. et al. 2011).

1.4. Errores en la medición

Error absoluto: es la diferencia entre el valor medido y el valor promedio, y se debe expresar de la siguiente manera:

$M = m \pm \Delta m$ donde:

M = representación de la medida.

m = valor más probable de la medición (valor promedio).

Δm = intervalo de incertidumbre (error absoluto).

- El valor promedio (m) se calcula sumando todas las mediciones y dividiendo su resultado entre el número de mediciones realizadas (al igual que calculas tu promedio de calificaciones).
- El error absoluto (Δm) se calcula sumando los valores absolutos de las desviaciones medias, es decir, primero se resta cada medición menos el valor promedio.
- Se obtiene dividiendo el error absoluto entre el valor promedio, esto es: $Er = \Delta m / m$

Error relativo: se obtiene dividiendo el error absoluto entre el valor promedio, esto es: $E_r = \Delta m / m$

Error porcentual: se obtiene multiplicando el error relativo por 100 para que se exprese en % (Pérez, H. 2013). Esto es:

$$E_p = E_r \times 100$$

Ejemplo 13.

Al medir 6 veces la longitud de un palo de escoba se obtuvieron las siguientes medidas: 1,56 m, 1,58 m, 1,55 m, 1,59 m, 1,57 m, 1,60 m. Determine:

a) El valor más probable de la longitud del palo de escoba.

Solución

Se procede a calcular el valor **promedio**.

$$m = \frac{1,56 + 1,58 + 1,55 + 1,59 + 1,57 + 1,60}{6} = \frac{9,45}{6} = 1,575 \text{ m} = 1,58 \text{ m}$$

b) El **error absoluto** de la medida.

$$(1,56 - 1,58) = (-0,02) = 0,02$$

$$(1,58 - 1,58) = (0) = 0$$

$$(1,55 - 1,58) = (-0,03) = 0,03$$

$$(1,59 - 1,58) = (0,01) = 0,01$$

$$(1,57 - 1,58) = (-0,01) = 0,01$$

$$(1,60 - 1,58) = (0,02) = 0,02$$

$$\Delta m = \frac{0,02 + 0 + 0,03 + 0,01 + 0,01 + 0,02}{6} = \frac{0,09}{6} = 0,015$$

c) La longitud del palo de escoba se debe expresar así:

$$M = m + \Delta m$$

$$M = 1,58 \pm 0,02 \text{ m}$$

Lo que indica que estará entre $1,58 - 0,02 = 1,56$ y $1,58 + 0,02 = 1,60$ m, es decir, la **medida del palo de escoba estará entre 1,56 y 1,60 m**

d) El error relativo de la medida

Se divide el error absoluto entre el valor más probable

$$E_r = \frac{\Delta m}{m} = \frac{0,02}{1,58} = 0,0126$$

e) El error porcentual

Se multiplica el error relativo por 100%

$$E_p = E_r \times 100\%$$

$$E_p = 0,0126 \times 100\%$$

$$E_p = 1,26 \%$$

Hay una variación de 1,26% entre las medidas realizadas.

1.5. Notación científica

En muchas ocasiones vemos escritas o escuchamos hablar de cantidades demasiado grandes o muy pequeñas. Para simplificarlas, se utiliza la notación científica.

Notación científica: “es la que permite escribir grandes o pequeñas cantidades en forma abreviada con potencias de 10, con un número a la izquierda del punto decimal”.

Cuando un número se eleva a una potencia, ésta nos indica las veces que el número se multiplica por sí mismo.

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$$

En la notación científica los números se expresan como un producto:

$$a \times 10^n \text{ donde}$$

a es un número real mayor o igual que 1 y menor que 10, llamado coeficiente; n es un número entero, que recibe el nombre de exponente u orden de magnitud. (Burbano, S. et al. 2004).

En el caso de potencias con base 10, siempre será el número 10 el que esté elevado a **potencias positivas**.

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$$

Como podrás notar, la potencia a la que está elevado el número 10 es igual al número de ceros que tendrá la cantidad final, antecedido de un 1.

En cuanto a las potencias negativas de 10, equivale a dividir el número 1 entre 10 o 100 o 1 000 etc. y se expresa escribiendo 10 **con los exponentes negativos**.

$$\frac{1}{10} = 0,1 = 10^{-1}$$

$$\frac{1}{100} = 0,01 = 10^{-2}$$

$$\frac{1}{1000} = 0,001 = 10^{-3}$$

$$\frac{1}{10\,000} = 0,0001 = 10^{-4}$$

$$\frac{1}{100\,000} = 0,00001 = 10^{-5}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000} = 0,000001 = 10^{-6}$$

Cuando la base 10 está elevada a una *potencia negativa*, el resultado es igual a recorrer hacia la izquierda el punto decimal a partir del número 1, tantas veces como señale la *potencia negativa*.

1.5.1. Conversión de notación decimal a científica

Para representar un número pequeño en notación científica, el punto decimal se recorre a la *derecha* y la *potencia queda negativa*; el exponente se determina tomando *cuantos lugares el punto se recorrió*.

Ejemplo 14.

$0,000158 = 1,58 \times 10^{-4}$, ya que el punto se recorrió 4 lugares a la derecha.

$0,0000986 = 9,86 \times 10^{-5}$, ya que el punto se recorrió 5 lugares a la derecha.

$0,00000025 = 2,5 \times 10^{-7}$, ya que el punto se recorrió 7 lugares a la derecha.

Como observarás, en la notación científica únicamente queda un número entero a la izquierda del punto decimal y varios números a la derecha del punto.

Para representar en notación científica un número grande o con muchos ceros, el punto decimal (que no se escribe, pero está hasta la derecha de

la cantidad) se *recorre a la izquierda tantos lugares* como indica la potencia y la potencia queda positiva. (Burbano, S. et al. 2004).

Ejemplo 15.

- $50\,000 = 5 \times 10^4$, el punto se recorrió 4 lugares a la izquierda.
- $4'600\,000 = 4,6 \times 10^6$, el punto se recorrió 5 lugares a la izquierda.
- $842'000\,000 = 8,42 \times 10^8$, el punto se recorrió 8 lugares a la izquierda.

1.5.2. Conversión de notación científica a decimal

Para pasar un número de notación científica a decimal, si la potencia es negativa el punto se recorre a la izquierda y se agregan ceros a la izquierda. (Burbano, S. et al. 2004).

Ejemplo 16.

- $5,4 \times 10^{-4} = 0,00054$; ya que el punto se recorrió 4 lugares a la izquierda y se agregaron 3 ceros.
- $8,12 \times 10^{-6} = 0,00000812$, ya que el punto se recorrió 6 lugares a la izquierda y se agregaron 5 ceros.

Si la potencia es positiva el punto se recorre y se agregan ceros a la derecha.

Ejemplo 17.

- $5,8 \times 10^5 = 580\,000$, ya que el punto se recorrió 5 lugares a la derecha y se agregaron 4 ceros.
- $8,92 \times 10^7 = 89'200\,000$, ya que el punto se recorrió 7 lugares a la derecha y se agregaron 5 ceros.

1.5.3. Suma y resta de cantidades en notación científica

Cuando se suman o restan cantidades en notación científica, las *potencias de 10 deben ser iguales*, tomando como factor común la potencia de 10 y sumando o restando los coeficientes.

Ejemplo 18.

Sumar $6,3 \times 10^6 + 4,58 \times 10^7$

Existen dos formas de solucionar

Solución 1

Se igualan las potencias en 7 o en 6

$$6,3 \times 10^6 = 0,63 \times 10^7$$

$$(0,63 + 4,58)10^7 = \mathbf{5,21 \times 10^7}$$

Solución 2

$$4,58 \times 10^7 = 45,8 \times 10^6$$

$$(6,3 + 45,8)10^6 = \mathbf{52,1 \times 10^6}$$

Ejemplo 19.

Restar $8,4 \times 10^8 + 2,89 \times 10^7$

Existen dos formas de solucionar

Solución 1

Se igualan las potencias en 7 o en 6

$$8,4 \times 10^8 = 84 \times 10^7$$

$$(84 - 2,89)10^7 = \mathbf{81,11 \times 10^7}$$

Solución 2

$$2,89 \times 10^7 = 0,289 \times 10^8$$

$$(8,4 - 0,289)10^8 = \mathbf{8,11 \times 10^8}$$

1.5.4. Multiplicación con notación científica

Se multiplican primero los coeficientes, y para las potencias de 10 se aplica la ley de los exponentes de la multiplicación, la cual explica que cuando la base es la misma, los exponentes se suman algebraicamente: $(x^m)(x^n) = x^{m+n}$, por lo tanto, en potencias de 10 se aplica como $(10^m)(10^n) = 10^{m+n}$

Ejemplo 20.

Multiplicar $(5,6 \times 10^{-3}) (4,2 \times 10^{-4})$

Solución

Se multiplican los coeficientes $5,6 \times 4,2 = \mathbf{23,52}$

Las potencias de base 10 $(10^{-3})(10^{-4}) = 10^{(-3)+(-4)} = 10^{-7}$

Resulta $23,52 \times 10^{-7} = 2,35 \times 10^{-6}$

1.5.5. División con notación científica

Se dividen primero los coeficientes, y para las potencias de 10 se aplica la ley de los exponentes de la división, los exponentes se restan algebraicamente: $x^m / x^n = x^{m-n}$, que en potencias de 10 aplica como $10^m / 10^n = 10^{m-n}$ (Cromer, A. 2008).

Ejemplo 21.

Dividir $3,2 \times 10^{-4} \div 8,1 \times 10^{12}$

Solución

Se dividen los coeficientes $3,2 \div 8,1 = 0,395$

Se restan los exponentes de las potencias de base 10 $= 10^{-4-12} = 10^{-16}$

Resulta $0,395 \times 10^{-16} = 3,95 \times 10^{-17}$

Ejercicio 1

Realiza las siguientes conversiones en los ejercicios del 1 – 10

1. $1/2$ kg a g
2. $21\,600\text{ cm}^2$ a m^2
3. $\frac{1}{4}$ kg a mg
4. 28 km/h a m/s
5. Se desea conocer cuántos litros caben en una alberca de 50 m de largo, 25 m de ancho y 2,7 m de profundidad
6. 25 lb a kg
7. 2,2 m a ft
8. 30 l a gal.
9. 120 km/h a mi/h
10. 3,2 fl oz a ml

Expresar de notación decimal a científica

11. 0,0000255
12. Sumar $6,8 \times 10^6 + 4,35 \times 10^7$
13. Restar $8,1 \times 10^8 + 2,64 \times 10^7$
14. Multiplicar $(5,2 \times 10^{-3})(4,9 \times 10^{-4})$
15. Dividir $2,8 \times 10^{-4} \div 8,4 \times 10^{12}$
16. Realiza 5 veces la medición del peso de tu compañero y calcula:
 - a) El valor más probable.
 - b) El error absoluto.
 - c) ¿Cómo se debe expresar la medida?
 - d) El error relativo.
 - e) El error porcentual.

CAPÍTULO 2.

UNIDADES, CANTIDADES FÍSICAS Y VECTORES

METAS DE APRENDIZAJE

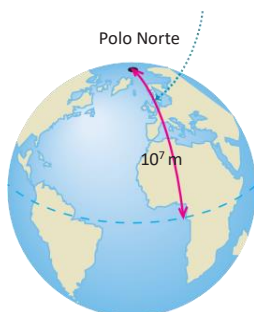
Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cuáles son las cantidades fundamentales de la mecánica y cuáles son las unidades que los físicos utilizan para medirlas.
- La diferencia entre magnitud escalar y vectorial, y cómo sumar y restar vectores gráficamente.
- Cuáles son las componentes de un vector y cómo se utilizan para realizar cálculos.
- Cuáles son los vectores unitarios y cómo se utilizan con las componentes para describir vectores.
- Dos formas para multiplicar vectores.

2.1. Unidades

Las definiciones de las unidades básicas del sistema métrico han evolucionado. Cuando la Academia Francesa de Ciencias estableció el sistema en 1791, el metro se definió como una diezmillonésima parte de la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador como se muestra en la figura.

El metro se definió como $1/10\,000\,000$ de esta distancia



Con la definición moderna del metro, esta distancia es aproximadamente 0,02% más que 10^7 m.

El segundo se definió como el tiempo que tarda un péndulo de 1 metro de largo en oscilar de un lado a otro. Estas definiciones eran poco prácticas y difíciles de duplicar con precisión, por lo que se han refinado por acuerdo internacional (Cuéllar, C. 2013).

2.1.1. Estándares y unidades

La física es una ciencia experimental. Los experimentos requieren mediciones, cuyos resultados suelen describirse con números. Un número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico es una cantidad física. Dos cantidades físicas, por ejemplo, que describen a alguien como tú son su peso y estatura. Algunas cantidades físicas son tan básicas que sólo podemos definirlas describiendo la forma de medirlas; es decir, con una definición operativa. Ejemplos de ello son medir una distancia con una regla, o un lapso de tiempo con un cronómetro. En otros casos, definimos una cantidad física describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades medibles. Así, podríamos definir la rapidez promedio de un objeto en movimiento,

como la distancia recorrida “*medida con una regla*” entre el tiempo de recorrido “*medido con un cronómetro*” (Gettys, W. et al. 1991).

Tiempo

La unidad de tiempo se definió como cierta fracción del día solar medio. El metro se definió originalmente como $1/10\,000\,000$ de esta distancia 10^7 m. entre el Polo Norte y Ecuador. El estándar actual, adoptado en 1967, es mucho más preciso; se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio.

Longitud

En 1960 se estableció también un estándar atómico para el metro, utilizando la longitud de onda de la luz anaranjada-roja emitida por átomos de kriptón (^{86}Kr) en un tubo de descarga de luz. Usando este estándar de longitud, se comprobó que la rapidez de la luz en el vacío era de 299 792 458 m/s. En noviembre de 1983, el estándar de longitud se modificó otra vez, de manera que la rapidez de la luz en el vacío fuera, por definición, exactamente de 299 792 458 m/s. El metro se define de modo que sea congruente con este número y con la definición anterior del segundo. Así, la nueva definición de metro (que se abrevia m) es la distancia que recorre la luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ segundos.

Masa

El estándar de masa, el kilogramo (que se abrevia kg), se define como la masa de un cilindro de aleación platino-iridio específico que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sévres, cerca de París. Un estándar atómico de masa sería más fundamental; sin embargo, en la actualidad no podemos medir masas a escala atómica con tanta exactitud como a escala macroscópica. El gramo (que no es una unidad fundamental) es de 0,001 kilogramos. (Gettys, W. et al. 1991).

2.1.2. Prefijos de unidades

Los nombres de las unidades adicionales se obtienen agregando un prefijo al nombre de la unidad fundamental. Por ejemplo, el prefijo “kilo”, abreviado k, siempre indica una unidad 1000 veces mayor; así:

- 1 kilómetro = 1 km = 10^3 metros = 10^3 m
- 1 kilogramo = 1 kg = 10^3 gramos = 10^3 g
- 1 kilowatt = 1 kW = 10^3 watts = 10^3 W

Veamos algunos ejemplos del uso de múltiplos de 10 y sus prefijos con las unidades de longitud, masa y tiempo.

Longitud

- 1 nanómetro = 1 nm = 10^{-9} m
- 1 micrómetro = 1 μ m = 10^{-6} m
- 1 centímetro = 1 cm = 10^{-2} m
- 1 kilómetro = 1 km = 10^3 m

Masa

- 1 microgramo = 1 μ g = 10^{-6} g = 10^{-9} kg
- 1 miligramo = 1 mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg
- 1 gramo = 1 g = 10^{-3} kg

2.1.3. Sistema Británico

El sistema británico de unidades que se usa sólo en Estados Unidos y unos cuantos países más; aunque en casi todo el mundo se está reemplazando por el SI. En la actualidad las unidades británicas se definen oficialmente en términos de las unidades del SI, de la siguiente manera:

- Longitud: 1 pulgada 2,54 cm (exactamente)
- Fuerza: 1 libra 4,448221615260 newtons (exactamente)

El newton, que se abrevia N, es la unidad de fuerza en el SI. La unidad británica de tiempo es el segundo, que se define igual que en el SI. En

física, las unidades británicas se emplean sólo en mecánica y termodinámica; no hay un sistema británico de unidades eléctricas. En este libro usaremos unidades del SI en todos los ejemplos y problemas; no obstante, en ocasiones daremos equivalencias en unidades británicas.

2.2. Cantidades físicas

Utilizamos ecuaciones para expresar las relaciones entre cantidades físicas representadas por símbolos algebraicos. Cada símbolo algebraico denota siempre tanto un número como una unidad. Por ejemplo, d podría representar una distancia de 20 m, t un tiempo de 5 s y v una rapidez de 4 m/s. Solo podemos igualar dos términos si tienen las mismas unidades (Hewitt, P. 2008).

Por ejemplo, si un cuerpo que viaja con rapidez constante v recorre una distancia d en un tiempo t , estas cantidades están relacionadas por la ecuación.

$$d = v \cdot t$$

$$20 \text{ m} = \left(4 \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\right) 5 \cancel{\text{s}}$$

Si d se mide en metros, entonces el producto $v \cdot t$ también debe expresarse en metros, porque se elimina segundos. En los cálculos, las unidades se tratan igual que los símbolos algebraicos en cuanto a la multiplicación y la división.

2.2.1. Estrategia para resolver problemas

Identificar los conceptos pertinentes: en la conversión de unidades es importante, usar las unidades fundamentales del SI (longitudes en metros, masas en kilogramos y tiempo en segundos) en la solución de un problema. Si la respuesta se debe dar en otras unidades (kilómetros, gramos u horas), espere hasta el final para realizar la conversión.

Plantear el problema: el alumno no solo debe tener una noción de que se trata. Lo importante es la comprensión completa de la situación, la determinación de lo que se busca y encontrar la información exacta que plantea la redacción del problema, por lo cual, el alumno debe analizar en toda la redacción del problema.

Ejecutar la solución: las unidades se multiplican y se dividen igual que los símbolos algebraicos ordinarios. La clave es que podemos expresar la misma cantidad física en dos unidades distintas y formar una igualdad. Por ejemplo, 1 min = 60 s, 1 minuto representa el mismo intervalo de tiempo que es 60 s. Podemos multiplicar una cantidad por cualquier factor, sin alterar el significado físico de la misma. Por ejemplo, cuantos segundos hay en 4 minutos (Hewitt, P. 2008).

Ejemplo 1.

$$4 \text{ min} = (4 \cancel{\text{ min}}) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{ min}}} \right) = 240 \text{ s}$$

Se simplifica minutos y se multiplica 4 por 60 s y resultan 240 s.

Ejemplo 2.

Convertir una velocidad de 110 km/h a m/s

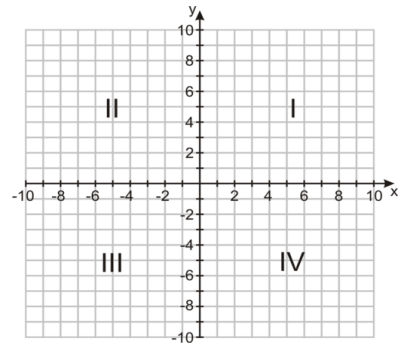
$$V = 110 \frac{\cancel{\text{ km}}}{\cancel{\text{ h}}} \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{ km}}} \right) \left(\frac{1 \cancel{\text{ h}}}{60 \cancel{\text{ min}}} \right) \left(\frac{1 \cancel{\text{ min}}}{60 \text{ s}} \right) = 30,56 \text{ m/s}$$

Evaluar la respuesta: Si convertimos las unidades correctamente, se eliminan las unidades no deseadas, como en los ejemplos anteriores. Por último, verificamos si la respuesta es lógica. ¿El resultado 4 min = 240 s es razonable? ¿El resultado 110 km/h = 30,56 m/s es razonable? La respuesta es correcta por lo que hay más segundos que minutos en el mismo intervalo de tiempo y en el otro ejemplo hay menos metro por segundo que kilometro por hora.

2.3. Vectores

2.3.1. Coordenadas rectangulares

Las coordenadas rectangulares están formadas por dos ejes numéricos perpendiculares entre sí. El punto de intersección se considera como el origen de cada uno de los ejes numéricos **x** e **y**. Este punto se llama **origen de coordenadas** y se representa con la letra **O**.



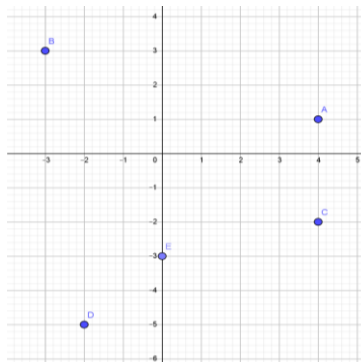
El eje horizontal se denomina **abscisa** o eje de las **x**. Es positiva a la derecha del origen, y negativa a la izquierda. El eje vertical se denomina **ordenada** o eje de las **y**. Es positiva hacia arriba del origen, y negativa abajo. Estos ejes numéricos perpendiculares dividen al plano en cuatro cuadrantes ordenados de derecha a izquierda.

La posición de un punto en el plano queda determinada por un par de números ordenados (**x**, **y**), llamados coordenadas rectangulares, que corresponden a la intersección de una **abscisa** (**x**) y una **ordenada** en (**y**). (Vallejo, P. 2009).

Ejemplo 3.

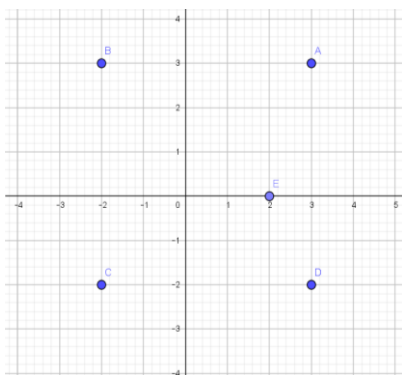
Representar la posición de los siguientes puntos en el plano:

- A (4, 1)
- B (-3, 3)
- C (4, -2)
- D (-2, -5)
- E (0, -3)



Ejemplo 4.

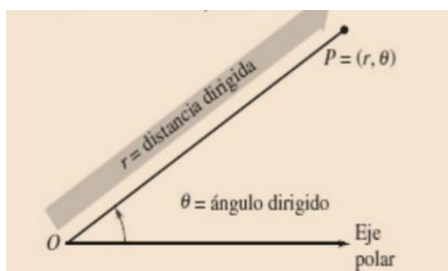
Determinar qué coordenadas rectangulares representan los siguientes puntos:



A(3,3)
B(-2,3)
C(-2,-2)
D(3,-2)
E(2,0)

2.3.2. Coordenadas polares

Están formadas por un eje numérico de referencia x, denominado **eje polar**. En un punto de éste se halla el origen de coordenadas **O**, llamado **origen o polo**. (Vallejo, P. 2009).



La posición de un punto en el plano queda determinada por un par ordenado (r, θ) , donde (r) es el **radio vector** y representa la distancia positiva del origen al punto; y (θ) es el **ángulo polar** y representa la medida del ángulo desde el eje polar hasta el radio vector, en sentido antihorario (Vallejo, P. 2009).

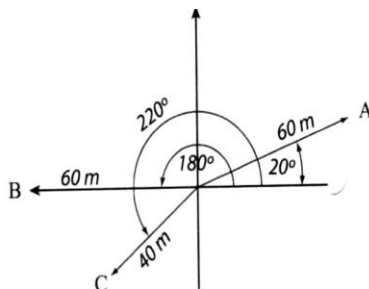
Ejemplo 5.

Representar la posición de los siguientes puntos en el plano:

A (60 m, 20°)

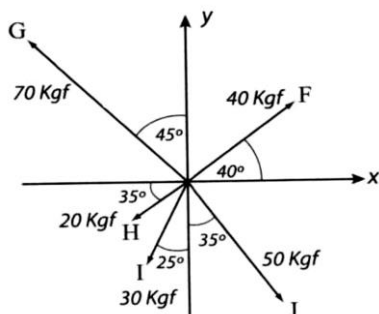
B (60 m, 180°)

C (40 cm, 220°)



Ejemplo 6.

Determinar qué coordenadas polares representan los siguientes puntos:



F (40 kgf, 40°)

G (70 kgf, 135°)

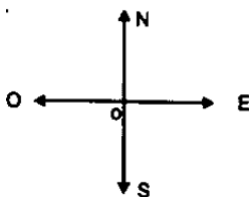
H (20 kgf, 215°)

I (30 kgf, 245°)

J (50 kgf, 305°)

2.3.3. Coordenadas geográficas

Están formadas por dos ejes perpendiculares entre sí. El punto de intersección de los ejes se considera como el origen de cada uno de ellos. Estos ejes perpendiculares dividen al plano en los cuatro puntos cardinales: Norte, Sur, Este y Oeste.



El eje horizontal representa el Este (**E**) a la derecha del origen, y el Oeste (**O**) a la izquierda del Origen. El eje vertical representa el Norte (**N**) hacia arriba del origen, y el Sur (**S**) hacia abajo del origen.

La posición de un punto en el plano queda determinada por un par ordenado (**r**, **rumbo**), donde (**r**) representa la *distancia positiva* del origen hasta el punto, y (**rumbo**) representa la *dirección medida a partir del Norte o Sur*. (Vallejo, P. 2009).

Para representar el rumbo, *primero se menciona la palabra Norte o Sur*, luego el ángulo agudo y *finalmente la posición Este u Oeste*.

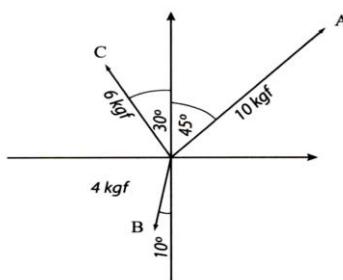
Ejemplo 7.

Representar la posición de los siguientes puntos en el plano

A (10 kgf, NE)

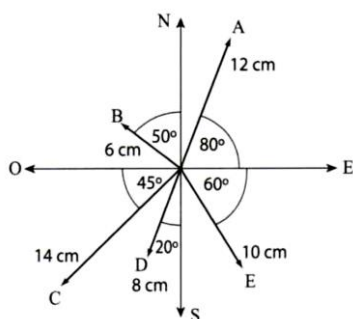
B (4 kgf, S10°O)

C (6 kgf, N30°O)



Ejemplo 8.

Determinar las coordenadas geográficas que corresponden a los siguientes puntos:



A (12 cm, N10°E)

B (6 cm, N50°O)

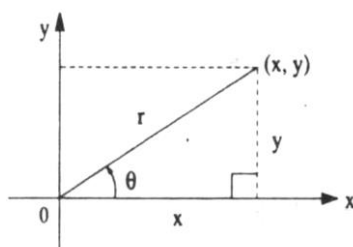
C (14 cm, S45°O)

D (8 cm, S20°O)

E (10 cm, S30°E)

2.3.4. Resolución de triángulos rectángulos

Un triángulo rectángulo está compuesto por seis elementos: tres lados, dos ángulos agudos y un ángulo recto. La suma de los ángulos agudos es 90° .



En la resolución de un triángulo rectángulo es necesario conocer tres de los seis elementos que lo componen, siempre que uno de ellos sea un lado. Para la resolución se aplica:

- Teorema de Pitágoras.
- Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo.

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos elevados al cuadrado (Eisberg, L. 1983).

$$r^2 = x^2 + y^2$$

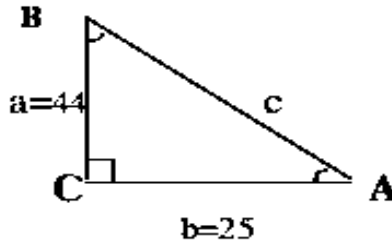
Principales funciones trigonométricas de un ángulo agudo

En la resolución de un triángulo rectángulo las principales funciones trigonométricas son.

Función	Símbolo	Triángulo Rectángulo	Fórmula
Seno	Sen θ	$\frac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}}$	$\frac{y}{r}$
Coseno	Cos θ	$\frac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}}$	$\frac{x}{r}$
Tangente	Tan θ	$\frac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}}$	$\frac{y}{x}$

Ejemplo 9.

Resolver el triángulo rectángulo



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 44^2 + 25^2$$

$$c^2 = 1936 + 625$$

$$c = \sqrt{2561}$$

$$c = 50,61$$

$$\tan A = a/b$$

$$\tan A = 44/25$$

$$\tan A = 1,76$$

$$\angle A = 60^\circ 24'$$

$$\angle B = 89^\circ 60' - 60^\circ 24'$$

$$\angle B = 29^\circ 36'$$

Ejemplo 10.

Resolver el triángulo rectángulo



$$r^2 = t^2 - s^2$$

$$r^2 = 32,5^2 - 15,25^2$$

$$r^2 = 1056,25 - 232,56$$

$$r = \sqrt{823,69}$$

$$r = 28,7$$

$$\cos R = s/t$$

$$\cos R = 15,25/32,5$$

$$\cos R = 0,469230$$

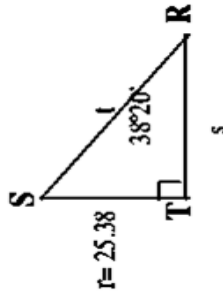
$$\angle R = 62^\circ 1'$$

$$\angle S = 89^\circ 60' - 62^\circ 1'$$

$$\angle S = 27^\circ 59'$$

Ejemplo 11.

Resolver el triángulo rectángulo



$$\tan R = r/s$$

$$\tan 38^\circ 20' = 25,38/s$$

$$s = 25,38/0,7907$$

$$s = 32,10$$

$$\sin R = r/t$$

$$\sin 38^\circ 20' = 25,38/t$$

$$t = 25,38/0,6202$$

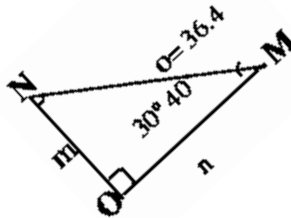
$$t = 40,92$$

$$\angle S = 89^\circ 60' - 38^\circ 20'$$

$$\angle S = 51^\circ 40'$$

Ejemplo 12.

Resolver el triángulo rectángulo



$$\sin M = m/o$$

$$\sin 30^\circ 40' = m/36,4$$

$$m = 36,4 (0,5100)$$

$$m = 18,56$$

$$\cos M = n/o$$

$$\cos 30^\circ 40' = n/36,4$$

$$n = 36,4 (0,8601)$$

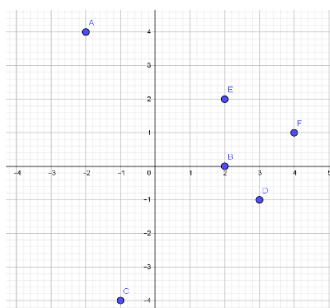
$$n = 31,31$$

$$\angle N = 89^\circ 60' - 30^\circ 40'$$

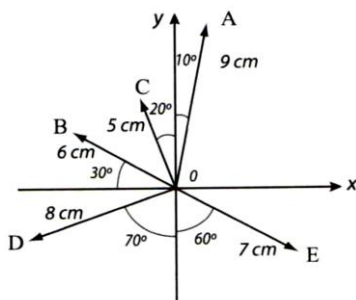
$$\angle N = 59^\circ 20'$$

Ejercicio 2

1. Convertir la velocidad de 90 km/h a m/s
2. Convertir la velocidad de 55 m/s a km/h
3. Representar las siguientes coordenadas rectangulares en el plano:
 $A = (-5, 2)$ $D = (1, 5)$
 $B = (2, -6)$ $E = (0, -3)$
 $C = (-4, -3)$ $F = (6, 0)$
4. Determinar las coordenadas rectangulares que corresponden a los siguientes puntos:



5. Representar las siguientes coordenadas polares en el plano:
 $D = (50 \text{ m}, 80^\circ)$ $G = (40 \text{ m}, 45^\circ)$
 $E = (30 \text{ m}, 300^\circ)$ $H = (45 \text{ m}, 205^\circ)$
 $F = (20 \text{ m}, 120^\circ)$ $I = (35 \text{ m}, 270^\circ)$
6. Determinar las coordenadas polares que corresponden a los siguientes puntos:



7. Representar las siguientes coordenadas geográficas en el plano:

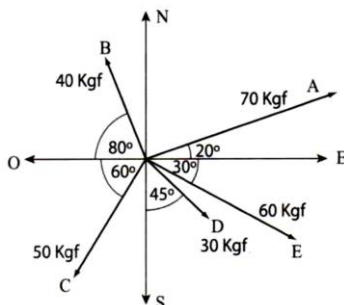
T = (14 cm, SO)

V = (16 cm, N40O°)

U = (10 cm, N15°E)

W = (8 cm, S25E°)

8. Determinar las coordenadas geográficas que corresponden a los siguientes puntos:



9. Sin graficar, indicar en que cuadrante está situado cada uno de los siguientes puntos:

S = (70 m, 130°)

X = (42 N, 280°)

T = (45 m, 250°)

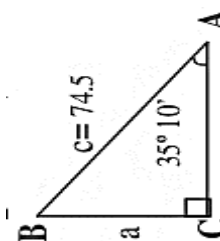
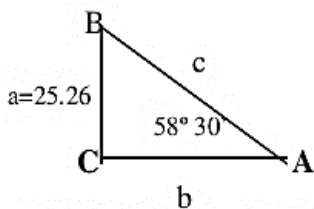
Y = (70 N, 170°)

U = (50 m, 40°)

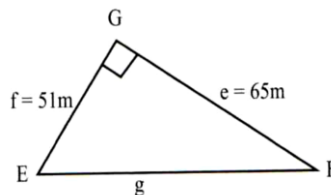
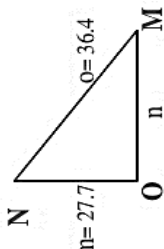
Z = (95 N, 30°)

10. Resolver los siguientes triángulos rectángulos:

a) R $b = 15,54$ $c = 29,79$ $\angle B = 54^\circ 50'$ b) $a = 42,9$ $b = 60,9$ $\angle B = 31^\circ 30'$



c) $\angle M = 49^\circ 33'$ $\angle N = 40^\circ 27'$ $n = 23,62$ d) $s = 82,62$ m $\angle E = 51,88^\circ$ $\angle F = 38,12^\circ$



2.4. Vectores en el plano

En física, se emplean dos tipos de magnitudes: la escalar y la vectorial

Magnitud escalar: es la que se define solamente por su valor numérico en un sistema de unidades seleccionado (French, A. 1998).

Ejemplo 1.

Longitud = 20 m

rapidez = 80 km/h

Masa = 85 kg

tiempo = 12 seg

Magnitud vectorial: es la que se define mediante su valor numérico, dirección y sentido, en un sistema de unidades seleccionado.

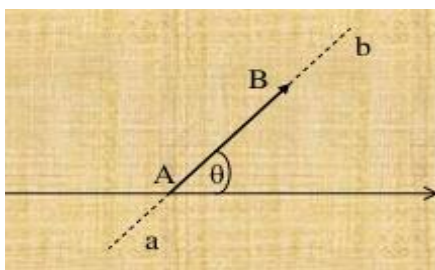
Ejemplo 2.

Desplazamiento = 15 m al norte velocidad = (70 km/h, N50°E)

Fuerza = (85 kg; 160°)

aceleración = $(3\vec{i} - 7\vec{j}) \text{ m/s}^2$

Las magnitudes vectoriales se representan gráficamente con segmentos orientados llamados vectores:

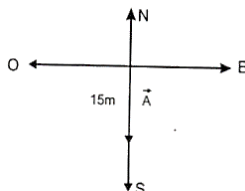


Un vector queda definido por dos puntos: su **origen** en el punto A, y el extremo en el punto B. El **módulo** se representa en una escala seleccionada que es su valor numérico, llamado también magnitud. El ángulo que forma el vector con el eje (x) en sentido antihorario, representa la **dirección**, y la saeta representa el **sentido**. La recta ab a lo largo de la cual está dirigida el vector, se llama línea de acción del vector. Los vectores se representan con letras mayúsculas y una flecha en la parte superior ($\vec{B}$). El módulo o magnitud con la misma letra, pero sin la flecha (B) (Gutiérrez A. 2010).

Ejemplo 3.

Representar gráficamente el siguiente vector:

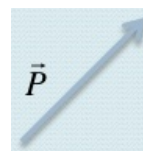
$A = (15 \text{ m al sur})$



2.4.1. Clases de vectores

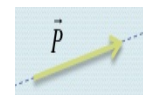
Vector libre

Puede moverse libremente en el espacio porque su origen se traslada a cualquier punto sin cambiar su módulo, sentido o dirección.



Vector deslizante

Es aquel que puede trasladar su origen a lo largo de su línea de acción sin cambiar su módulo, sentido o dirección.



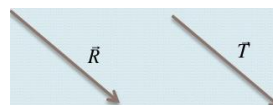
Vector fijo

Es aquel cuyo punto de aplicación (origen) es fijo; es decir, que se mantiene ligado a un punto del espacio, por lo que no puede desplazarse.



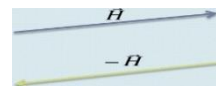
Vectores iguales

Se llaman así porque tienen la misma magnitud, dirección y sentido $\vec{R} = \vec{T}$.



Vectores opuestos

Tienen la misma magnitud, la misma dirección, pero sentido opuesto.

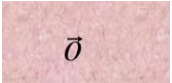


Vectores equivalentes

Son aquellos que, sin ser iguales, producen el mismo efecto. Por ejemplo: una fuerza pequeña ubicada a gran distancia del centro en una balanza de brazos equilibra a una fuerza grande ubicada a corta distancia.

Vector nulo

El origen y el extremo del vector coinciden en un mismo punto, por eso su módulo es igual a cero y no tiene dirección y sentido.



Vector unitario

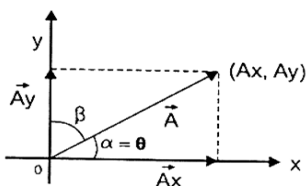
Es aquel en que el módulo es igual a la unidad (1). Se obtiene al dividir el vector por su módulo y es utilizado para determinar la dirección y sentido de un vector, bien sea en el plano o en el espacio, utilizando los vectores base o unitarios normalizados, que son:

$$\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{A} \quad \vec{A} = A \cdot \vec{U}_A$$

El vector unitario ($\vec{U}_A$) tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{A}$ y no tiene unidades (Goldemberg, J. 2010).

2.4.2. Descomposición de un vector en el plano

El punto inicial del vector $\vec{A}$ en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, queda determinado por las coordenadas rectangulares (A_x, A_y) del punto final, donde A_x y A_y que son las componentes del vector $\vec{A}$ con respecto al sistema de coordenadas dado.



Componentes de un vector

Son las proyecciones de dicho vector sobre los ejes de coordenadas.

$$A_x = A \cdot \cos \theta \quad A_y = A \cdot \sin \theta$$

Del gráfico se deduce que la magnitud de un vector en función de sus componentes es:

$A^2 = Ax^2 + Ay^2$	$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$
---------------------	--------------------------

La dirección de un vector en función de sus componentes, con respecto al eje x positivo es:

$\text{Tan } \theta = \frac{Ay}{Ax}$

Ángulos directores

Son aquellos que forman el vector con los ejes positivos x e y del sistema de coordenadas rectangulares, y varían entre 0 y 180°. No existe conversión para el giro de los ángulos directores. La relación entre componentes y el módulo del vector, se llama **coseno director** (Young, H. et al. 2009).

Los ángulos directores en el plano son:

- α es el que forma el vector con el eje positivo de las x.
- β es el que forma el vector con el eje positivo de las y.

$\text{Cos } \alpha = \frac{Ax}{A}$	$\text{Cos } \beta = \frac{Ay}{A}$
-------------------------------------	------------------------------------

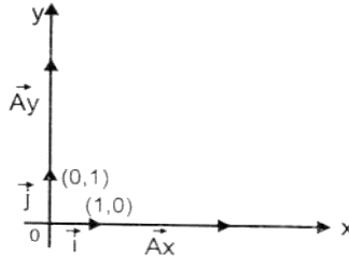
Se deduce, que entre la magnitud de un vector y los ángulos directores tenemos:

$$\begin{aligned} A^2 &= Ax^2 + Ay^2 \\ A^2 &= A^2 \cdot \cos^2 \alpha + A^2 \cdot \cos^2 \beta \\ A^2 &= A^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \end{aligned}$$

$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$

Vectores base o unitarios

Los vectores unitarios rectangulares del sistema de coordenadas rectangulares son:



- $\vec{i}$ es el vector unitario en la dirección positiva del eje x.
- $\vec{j}$ es el vector unitario en la dirección positiva del eje y.

Se deduce que un vector en función de sus vectores unitarios rectangulares es:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

Remplazando en el vector unitario, tenemos:

$$\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

$$\vec{U}_A = \frac{A_x \vec{i} + A_y \vec{j}}{A}$$

$$\vec{U}_A = \frac{A_x}{A} \vec{i} + \frac{A_y}{A} \vec{j}$$

$$\vec{U}_A = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j}$$

Concluimos que todo vector unitario indica la dirección y el sentido de un vector.

Ejemplo 4.

El módulo de un vector $\vec{B}$ es de 32 metros y forma un ángulo de 218° con el sentido positivo del eje x. Determinar:

- Las componentes del vector.
- Las coordenadas del punto extremo del vector.
- Los ángulos directores.
- El vector en función de los vectores base.
- El vector unitario.

Datos

$$B = 32 \text{ m}$$

$$\theta = 218^\circ$$

$$a) B_x = B \cdot \cos \theta$$

$$B_x = 32 \text{ m} \cdot \cos 218^\circ$$

$$B_x = 32 \text{ m} (-0,788011)$$

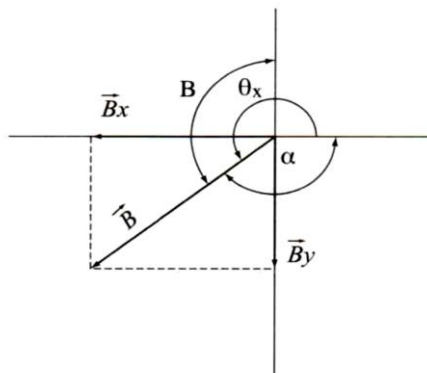
$$\mathbf{B_x = -25,22 \text{ m}}$$

$$B_y = B \cdot \sin \theta$$

$$B_y = 32 \text{ m} \cdot \sin 218^\circ$$

$$B_y = 32 \text{ m} (-0,615611)$$

$$\mathbf{B_y = -19,7 \text{ m}}$$



$$b) \vec{B} = (B_x, B_y)$$

$$\mathbf{\vec{B} = (-25,22; -19,7) \text{ m}}$$

$$c) \cos \alpha = \frac{B_x}{B} = \frac{-25,22 \text{ m}}{32 \text{ m}} = -0,788125 = \mathbf{\alpha = 142^\circ}$$

$$\cos \beta = \frac{B_y}{B} = \frac{-19,7 \text{ m}}{32 \text{ m}} = -0,615625 = \mathbf{\beta = 128^\circ}$$

$$d) \vec{B} = (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) \text{ m}$$

$$\mathbf{\vec{B} = (-25,22\vec{i} - 19,70\vec{j}) \text{ m}}$$

$$e) \vec{U}_B = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{(-25,22\vec{i} - 19,7\vec{j}) \text{ m}}{32 \text{ m}} = \mathbf{-0,79\vec{i} - 0,62\vec{j}}$$

Ejemplo 5.

Dado el vector $\vec{F} = (28\vec{i} - 33\vec{j})$ kgf. Determinar:

- Las componentes rectangulares del vector.
- Las coordenadas del punto extremo del vector.
- La magnitud del vector.
- La dirección.
- Los ángulos directores.
- El vector unitario.

Datos

$$\vec{F} = (28\vec{i} - 33\vec{j}) \text{ kgf}$$

a) $F_x = 28 \text{ kgf}$

$F_y = -33 \text{ kgf}$

b) $F = (F_x, F_y)$

$\vec{F} = (28; -33) \text{ kgf}$

c) $F^2 = F_x^2 + F_y^2$

$$F^2 = (28 \text{ kgf})^2 + (-33 \text{ kgf})^2$$

$$F^2 = 784 \text{ kgf}^2 + 1089 \text{ kgf}^2$$

$$F^2 = 1873 \text{ kgf}^2$$

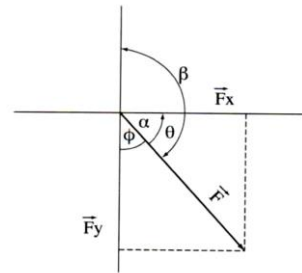
$F = 43,28 \text{ kgf}$

d) $\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{33 \text{ kgf}}{28 \text{ kgf}} = 1,178571 = \theta = 49,69^\circ$

$\phi = 90^\circ - 49,69^\circ = 40,31^\circ$ **S 40,31° E**

e) $\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{28 \text{ kgf}}{43,28 \text{ kgf}} = 0,646950 = \alpha = 49,69^\circ$

$\cos \beta = \frac{F_y}{F} = \frac{-33 \text{ kgf}}{43,28 \text{ kgf}} = -0,762477 = \beta = 139,68^\circ$



$$f) \vec{U}_F = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{(28\vec{i} - 33\vec{j}) \text{ kgf}}{43,28 \text{ kgf}} = \mathbf{0,65\vec{i} - 0,76\vec{j}}$$

Ejemplo 6.

La magnitud de un vector $\vec{E}$ es 73 km y su vector unitario $\vec{U}_E = m\vec{i} - 0,714\vec{j}$. Determinar:

- El valor de m.
- Los ángulos directores.
- El vector en función de los vectores base.
- Las componentes del vector.
- Las coordenadas del punto extremo del vector.
- La dirección.

Datos

$$E = 73 \text{ km}$$

$$\vec{U}_E = m\vec{i} - 0,714\vec{j}$$

Calculamos el valor de m, aplicando la relación $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

$$a) \vec{U}_E = m\vec{i} - 0,714\vec{j}$$

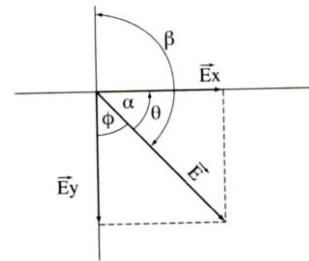
$$\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta$$

$$\cos^2\alpha = 1 - (-0,714)^2$$

$$\cos^2\alpha = 1 - 0,51 = 0,49$$

$$\mathbf{\cos\alpha = m = 0,7}$$

$$\text{El vector unitario es: } \vec{U}_E = \mathbf{0,7\vec{i} - 0,714\vec{j}}$$



$$b) \cos\alpha = 0,7 \quad \mathbf{\alpha = 45,57^\circ}$$

$$\cos\beta = -0,714 \quad \mathbf{\beta = 135,56^\circ}$$

$$c) \vec{E} = E \cdot \vec{U}_E = 73 \text{ km} (0,7\vec{i} - 0,714\vec{j}) = \mathbf{(51,1\vec{i} - 52,12\vec{j}) \text{ km}}$$

$$d) \mathbf{E_x = 51,1 \text{ km}}$$

$$\mathbf{E_y = -52,12 \text{ km}}$$

$$e) \vec{E} = (E_x, E_y)$$

$$\mathbf{\vec{E} = (51,1; -52,12) \text{ km}}$$

$$f) \phi = 90^\circ - 45,57^\circ = 44,43^\circ \quad \mathbf{S44,43^\circ E}$$

Ejemplo 7.

La componente de un vector $\vec{J}$ según el eje x es 25 m y los ángulos directores son $\alpha = 35^\circ$ y $\beta = 125^\circ$. Determinar:

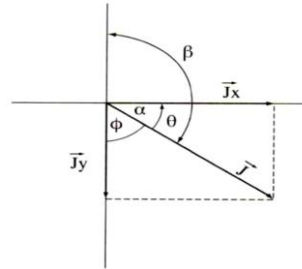
- El módulo del vector.
- La componente rectangular en y.
- Las coordenadas del punto extremo del vector.
- La dirección.
- El vector en función de los vectores base.
- El vector unitario.

Datos

$$J_x = 25 \text{ m}$$

$$\alpha = 35^\circ$$

$$\beta = 125^\circ$$



$$a) \cos \alpha = \frac{J_x}{J}$$

$$\text{Despejando el módulo } J = \frac{J_x}{\cos \alpha}$$

$$J = \frac{25 \text{ m}}{\cos 35^\circ} = \frac{25 \text{ m}}{0,81915} = \mathbf{30,52 \text{ m}}$$

$$b) J_y = J \sin \alpha$$

$$J_y = 30,52 \text{ m} \cdot \sin 35^\circ$$

$$J_y = 30,52 \text{ m} (0,573576)$$

Negativo por estar en el cuarto cuadrante $J_y = -17,51 \text{ m}$

$$c) \vec{J} = (J_x, J_y)$$

$$\mathbf{\vec{J} = (25; -17,51) \text{ km}}$$

$$d) \phi = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ \quad \mathbf{S55^\circ E}$$

$$e) \vec{J} = J_x \vec{i} + J_y \vec{j}$$

$$\mathbf{\vec{J} = (25\vec{i} - 17,51\vec{j}) \text{ km}}$$

$$f) \vec{U}_J = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j}$$

$$\vec{U}_J = \cos 35^\circ \vec{i} + \cos 125^\circ \vec{j} \quad \mathbf{\vec{U}_J = 0,82\vec{i} - 0,57\vec{j}}$$

Ejercicio 3

1. El módulo de un vector $\vec{A}$ es 8 metros, y forma un ángulo de 35° con el sentido positivo del eje x. Determinar:

- a) Las componentes del vector.
- b) Las coordenadas del vector.
- c) Los ángulos directores.
- d) El vector en función de vectores base.
- e) El vector unitario.

2. Dado el vector $\vec{C} = (4\vec{i} - 7\vec{j})$ cm. Determinar:

- a) Las componentes rectangulares del vector
- b) Las coordenadas del punto extremo del vector.
- c) La magnitud del vector.
- d) La dirección.
- e) Los ángulos directores.
- f) El vector unitario.

3. El módulo de un vector $\vec{D} = 14$ km y la de su componente según el eje x es 6,3 km. Determinar:

- a) La componente rectangular en y.
- b) Las coordenadas del vector.
- c) La dirección.
- d) Los ángulos directores.
- e) El vector en función de vectores base.
- f) El vector unitario.

4. Las coordenadas de los puntos inicial y final de un vector $\vec{F} = (3; 2)$ cm y $(-5; -2)$ cm respectivamente. Determinar:

- a) Las componentes del vector.
- b) El módulo.
- c) El rumbo.
- d) Los ángulos directores.
- e) El vector en función de vectores base.
- f) El vector unitario.

5. La componente de un vector $\vec{G}$ en el eje y es -18 kgf , el vector está orientado formando un ángulo de 225° con el eje positivo de las x. Determinar:

- a) El módulo del vector.
- b) La componente rectangular en x.
- c) Las coordenadas del extremo del vector.
- d) La dirección.
- e) Los ángulos directores.

f) El vector unitario.

6) El rumbo de un vector $\vec{B}$ es $N18^\circ E$ y el valor de la componente en el eje x es 46 m/s . Determinar:

- a) Los ángulos directores.
- b) El módulo del vector.
- c) La componente rectangular en y.
- d) Las coordenadas del extremo del vector.
- e) El vector en función de los vectores base.
- f) El vector unitario.

7. El módulo de un vector $\vec{H}$ es 12 metros y el vector unitario $\vec{U}_H = 0,342\vec{i} - m\vec{j}$. Determinar:

- a) El valor de m.
- b) Los ángulos directores.
- c) El vector en función de los vectores base.
- d) Las componentes del vector.
- e) Las coordenadas del punto extremo del vector.
- f) La dirección.

8. El módulo de un vector $\vec{C}$ es 71 kgf y la de su componente según el eje y es $42,3 \text{ kgf}$. Determinar:

- a) La componente rectangular en x.
- b) Las coordenadas del vector.
- c) La dirección.
- d) Los ángulos directores.
- e) El vector en función de vectores base.
- f) El vector unitario.

9) La magnitud de un vector $\vec{F}$ es 75 cm y forma un ángulo de 305° con el eje positivo de las x. Determinar:

- a) Los ángulos directores.
- b) Las componentes rectangulares del vector.
- c) Las coordenadas del extremo del vector.
- d) La dirección.
- e) El vector en función de los vectores base.
- f) El vector unitario.

10) El módulo de un vector $\vec{E}$ es 30 m y tiene como ángulos directores $\alpha = 65^\circ$ $\beta = 155^\circ$. Determinar:

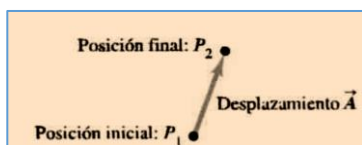
- a) El vector unitario.
- b) El vector en función de los vectores base.
- c) Las componentes rectangulares del vector.
- d) Las coordenadas del extremo del vector.
- e) La dirección.

2.5. Operaciones con vectores

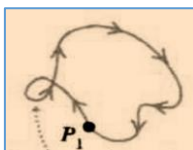
Algunas cantidades físicas, como tiempo, temperatura, masa y densidad se pueden describir con un número y una unidad. No obstante, en física muchas otras cantidades importantes están asociadas con una **dirección** y no pueden describirse con un solo número. Un ejemplo sencillo es el movimiento de un avión: para describirlo plenamente, debemos indicar no sólo qué tan rápidamente se mueve, sino también hacia dónde. Para ir de Chicago a Nueva York, un avión debe volar al este, no al sur. La rapidez del avión combinada con su dirección constituye una cantidad llamada **velocidad** (Jackson, H.; Wirtz, G. 2009).

Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** tiene una magnitud, como una dirección en el espacio. Los cálculos que combinan cantidades escalares usan operaciones aritméticas sencillas. Por ejemplo, $7 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 12 \text{ kg}$. No obstante, combinar vectores requiere un conjunto de operaciones diferentes.

Para entender mejor los vectores, comencemos con la cantidad vectorial más sencilla, el **desplazamiento**, que es un cambio en la posición de un punto. Para entender mejor los vectores, comencemos con la cantidad vectorial más sencilla, el desplazamiento, que es simplemente el cambio en la posición de un punto. En la figura representamos el cambio de posición del punto p_1 al punto p_2 con una línea que va de p_1 a p_2 , con una flecha en p_2 para indicar la dirección.



El desplazamiento es una cantidad vectorial, el desplazamiento depende sólo de las posiciones inicial y final, no de la trayectoria que siga.



Si un objeto hace un viaje redondo, el total de desplazamiento es cero, sin que importe la distancia recorrida. La partícula sigue el camino curvo de p_1 , pero el desplazamiento sigue siendo el vector $\vec{A}$. Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la distancia total recorrida.

2.5.1. Suma de vectores

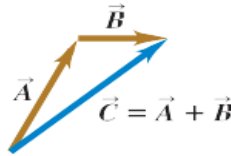
Suponga que una partícula sufra un desplazamiento $\vec{A}$, seguido por un segundo desplazamiento $\vec{B}$. El resultado final es el mismo que si la partícula hubiera partido del mismo punto y sufrido un solo desplazamiento $\vec{C}$ suma vectorial, o resultante, de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Expresamos esta relación como.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Método del polígono

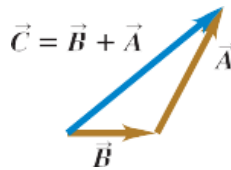
Podemos sumar dos o más vectores colocando punta de cola. A partir de un punto cualquiera del plano se trazan todos los vectores, uno a continuación de otro, manteniendo iguales sus módulos y direcciones. Uniendo el origen del primer vector con el extremo del último, se obtiene el vector resultante o suma (Pérez, H. 2013).

Ejemplo 1.



Si efectuamos los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en orden inverso, primero $\vec{B}$ y luego $\vec{A}$, el resultado será el mismo.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \text{ y } \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

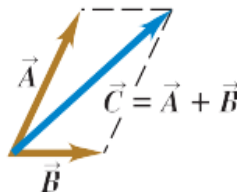


Esto indica que el orden de los vectores en la suma no importa, la suma de vectores sigue la ley conmutativa.

Método del paralelogramo

A partir de un punto cualquiera del plano se traza los dos vectores y se forma un paralelogramo. La diagonal del paralelogramo va desde el origen al vértice opuesto, representa el vector resultante o suma.

Ejemplo 2.



En el caso especial de que dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean paralelos, la magnitud de su suma es igual a la suma de sus magnitudes.

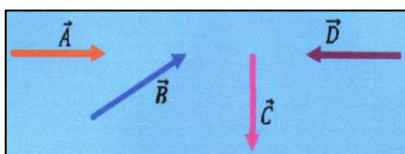
$$\begin{array}{c} \vec{A} \quad \vec{B} \\ \hline \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \end{array}$$

Método del polígono

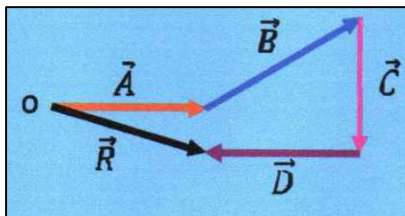
A partir de un punto cualquiera del plano se trazan todos los vectores, uno a continuación del otro manteniendo iguales sus módulos y direcciones. Uniendo el origen del primer vector con el extremo del último vector, se obtiene el vector resultante o suma. (Tippens, P. 2007).

Ejemplo 3.

Consideremos los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ como los mostrados en la figura:



El vector resultante de los vectores representados está dado por la operación suma:



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

El vector resultante $\vec{R}$ es el que va desde O hasta la punta del último vector dibujado.

Cálculo de vectores usando componentes

Conocido como Método algebraico, utiliza componentes y hace relativamente fáciles diversos cálculos que implican vectores. El vector

resultante es la magnitud y la dirección a partir del eje de x positivo en sentido antihorario hasta el vector $\vec{R} = (r, \theta)$.

Si conocemos las componentes de dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$, usando las componentes de la resultante $\vec{R}$, para calcular la suma de componentes funciona también para vectores con cualquier dirección en el espacio. Introducimos un eje z perpendicular al plano xy; entonces, en general, un vector $\vec{A}$ tiene componentes A_x , A_y y A_z en las tres direcciones de coordenadas. La magnitud A esta dada por.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Siempre tomamos la raíz positiva, para las componentes de la suma vectorial $\vec{R}$ tiene un miembro adicional.

Ejemplo 4.

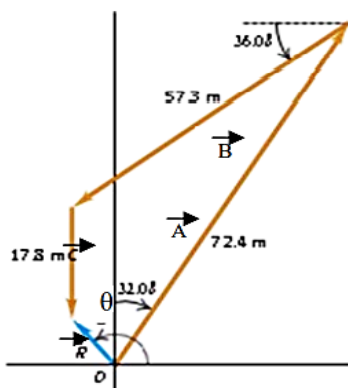
Los tres finalistas de un concurso de TV se colocan en el centro de un campo plano grande. Cada uno cuenta con una regla graduada de un metro de longitud, una brújula, una calculadora y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos.

$\vec{\Delta r} = (72,4 \text{ m}; \text{N}32^\circ\text{E})$, $\vec{\Delta r} = (57,3 \text{ m}; \text{S}36^\circ\text{O})$ y 17,8 m al sur

Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Posche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato. ¿Qué calculó la ganadora?

Solución

La finalidad es encontrar la suma resultante de los tres desplazamientos, así que se trata de un problema de suma vectorial.



La siguiente tabla muestra las componentes de todos los desplazamientos, la suma de las componentes y los demás cálculos. Los ángulos de los vectores, medidos del eje + x, son $(90^\circ - 32^\circ = 58^\circ)$, $(180^\circ + 36^\circ = 216^\circ)$ y 270° .

Distancia	Ángulo	Componente x	Componente y
A = 72,4 m	58°	38,37 m	61,40 m
B = 57,3 m	216°	-46,36 m	-33,68 m
C = 17,8 m	270°	0,00 m	-17,80 m
		-7,99 m	9,92 m

$$d = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$d = \sqrt{(-7,99)^2 + (9,92)^2} = \mathbf{12,7 \text{ m}}$$

$$\tan \theta = \frac{7,99 \text{ m}}{9,92 \text{ m}} = \mathbf{38,8^\circ}$$

$$\vec{R} = (12,7 \text{ m}; \text{N}38,8^\circ\text{E})$$

La ganadora midió solo un ángulo y una distancia mucho más corta.

2.5.2. Diferencia de vectores

La diferencia de vectores es un caso particular de la suma de vectores, se define como la suma de un vector con el negativo de otro:

Ejemplo 5.



Para construir la diferencia vectorial con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta, $\vec{A} - \vec{B}$ es el vector desde la cola de $\vec{A}$ hasta la cola de $\vec{B}$. El vector resultante $\vec{R}$ va de la cola del primero hasta la punta del último.

Ejemplo 6.

Dado el vector $\vec{C} = (100,5 \text{ m}; 121,16^\circ)$ y el vector $\vec{D} = (100 \text{ m}; 225^\circ)$.

Hallar:

- $\vec{C} - \vec{D}$ (Método del polígono)
- $\vec{C} - \vec{D}$ (Método de las componentes)

Datos

$$\vec{C} = (100,5 \text{ m}; 121,16^\circ)$$

$$\vec{D} = (100 \text{ m}; 225^\circ) \text{ m}$$

Solución

a) El método del polígono, los vectores deben estar en coordenadas polares y el vector resultante es el que va desde origen hasta la punta del vector de la diferencia.

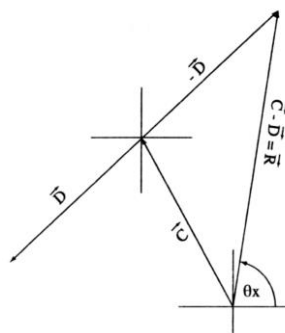
El módulo de la $\vec{R}$ es la medida de su longitud con una escala: $1 \text{ mm} = 2,5 \text{ m}$

$$\mathbf{R = 157,8 \text{ m}}$$

La dirección de $\vec{R}$ es la medida del ángulo de θ del eje de $+x$ con un graduador hasta el vector resultante: $\mathbf{\theta = 83,2^\circ}$

Donde el vector resultante es:

$$\mathbf{\vec{R} = (157,8 \text{ m}; 83,2^\circ)}$$



b)

Distancia	Ángulo	Componente x	Componente y
C = 100,5 m	121,16°	-52 m	86 m
D = 100 m	225°	70,7 m	70,7 m
		18,7 m	156,7 m

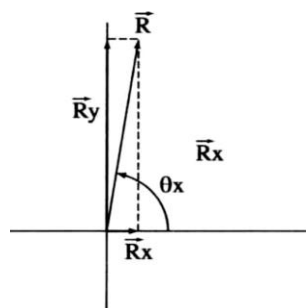
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{Escala: mm} = 2,5 \text{ m}$$

$$R = \sqrt{(18,7 \text{ m})^2 + (156,7 \text{ m})^2} = \mathbf{157,8 \text{ m}}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$$

$$\tan \theta = \frac{156,7 \text{ m}}{18,7 \text{ m}} = \mathbf{83,2^\circ}$$

$$\mathbf{R = (157,8 \text{ m}; 83,2^\circ)}$$



2.5.3. Multiplicación de un escalar por un vector

Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector podría cambiar, pero no su dirección (Serway, A.; Jewett, J. 2005).

Ejemplo 7.



$2\vec{A}$ es dos veces más grande que $\vec{A}$

Al multiplicar un vector por un escalar negativo, podría cambiar su magnitud e invertir su dirección.

Ejemplo 8.



$-3\vec{A}$ es tres veces más grande que $\vec{A}$ y apunta en la dirección contra.

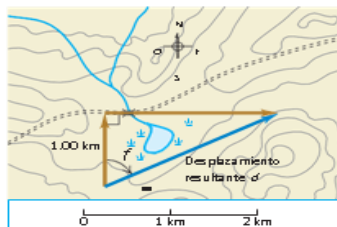
Ejercicios prácticos

Ejemplo 9.

Una esquiadora de fondo viaja 1 km al norte y luego 2 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

Solución

Las incógnitas son la distancia total y la dirección de la esquiadora con respecto al punto de partida. Podemos resolverlo con una suma de vectores y la dirección del vector del desplazamiento resultante.



$$d^2 = (1 \text{ km})^2 + (2 \text{ km})^2$$

$$d = \sqrt{5 \text{ km}^2}$$

$$d = 2,24 \text{ km}$$

$$\tan \phi = \frac{2 \text{ km}}{1 \text{ km}}$$

$$\tan \phi = 2$$

$$\phi = 63,4^\circ$$

$$d^2 = (1 \text{ km})^2 + (2 \text{ km})^2$$

La dirección sería N63,4°E

Ejemplo 10.

Dado el vector $\vec{A} = (18 \text{ km}; 71^\circ)$ y el vector $\vec{B} = (-14\vec{i} + 6\vec{j}) \text{ km}$. Hallar:

a) $\vec{A} + \vec{B}$ (Método del paralelogramo)

b) $\vec{A} + \vec{B}$ (Método del polígono)

Datos

$$\vec{A} = (18 \text{ km}; 71^\circ)$$

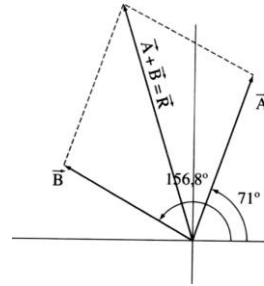
$$\vec{B} = (-14\vec{i} + 6\vec{j}) \text{ km}$$

Solución

a) Para resolver mediante el método del paralelogramo, los vectores deben estar en coordenadas polares y se trabaja mediante una escala.

$$\vec{A} = (18 \text{ km}; 71^\circ) = (18 \text{ km}; 71^\circ)$$

$$\vec{B} = (-14i + 6j) \text{ km} = (15,2 \text{ km}; 156,8^\circ)$$



$$d^2 = (-14 \text{ km})^2 + (6 \text{ km})^2$$

$$d = \sqrt{232 \text{ km}^2}$$

$$d = 15,2 \text{ km}$$

$$\tan \theta = \frac{14 \text{ km}}{6 \text{ km}}$$

$$\tan \theta = 2,33333$$

$$\theta = 66,8^\circ + 90^\circ = 156,8^\circ$$

El módulo de $\vec{R}$ es la medida de su longitud con una escala: km = 2 mm

$$R = 24,5 \text{ km}$$

La dirección de $\vec{R}$ es la medida del ángulo de θ con graduador: $\theta = 110^\circ$

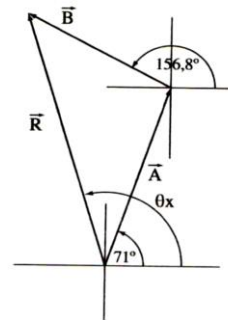
Donde el vector resultante es:

$$\vec{R} = (24,5 \text{ km}; 110^\circ)$$

b) Para sumar por el método del polígono, los vectores deben estar en coordenadas polares y el vector resultante es el que va desde origen hasta la punta del último vector.

El módulo de la $\vec{R}$ es la medida de su longitud con una escala: km = 2 mm

$$R = 24,5 \text{ km}$$



La dirección de $\vec{R}$ es la medida del ángulo de θ del eje de +x con un graduador hasta el vector resultante: $\theta = 110^\circ$

Donde el vector resultante es:

$$\vec{R} = (24,5 \text{ km}; 110^\circ)$$

Ejemplo 11.

Un avión despegue y viaje 10,4 km al oeste, 8,7 km al norte y 2,1 km hacia arriba. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

Solución

Sea el eje +x al este, el eje +y al norte y el eje +z hacia arriba. Entonces $A_x = -10,4$ km, $A_y = 8,7$ km y $A_z = 2,1$ km; entonces la ecuación es:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$d = \sqrt{(-10,4 \text{ km})^2 + (8,7 \text{ km})^2 + (2,1 \text{ km})^2}$$

$$\mathbf{d = 13,7 \text{ km}}$$

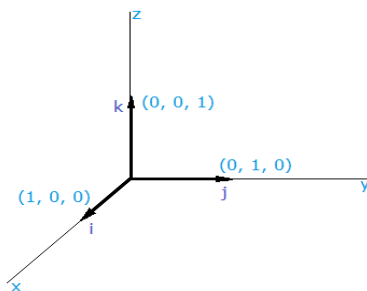
Vectores unitarios

En un sistema de coordenadas x e y podemos definir un vector unitario $\vec{i}$ que apunte en la dirección del eje +x y un vector unitario $\vec{j}$ que apunte en la dirección del eje +y. Así expresamos la relación entre vectores componentes, escribimos un vector $\vec{A}$ en término de sus vectores componentes como:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

Si todos los vectores no están en el plano xy, necesitamos una tercera componente. Introducimos un tercer vector unitario $\vec{k}$ que apunta en la dirección del eje +z, escribimos un vector A en términos de sus vectores unitarios.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$



Los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$

Ejemplo 12.

Dado los dos desplazamientos.

$$\vec{D} = (6\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \text{ m y } \vec{E} = (4\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}) \text{ m}$$

Obtenga la magnitud del desplazamiento $2\vec{D} - \vec{E}$

Solución

Multiplicamos el vector $\vec{D}$ por el 2, y luego restamos el vector $\vec{E}$ del resultado.

Si $\vec{F} = 2\vec{D} - \vec{E}$, tenemos

$$\vec{F} = 2(6\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \text{ m} - (4\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}) \text{ m}$$

$$\vec{F} = [(12 - 4)\vec{i} + (6 + 5)\vec{j} + (-2 - 8)\vec{k}] \text{ m}$$

$$\vec{F} = (8\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k}) \text{ m}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F = \sqrt{(8 \text{ m})^2 + (11 \text{ m})^2 + (-10 \text{ m})^2}$$

$$F = 17 \text{ m}$$

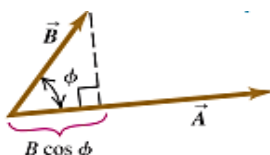
La magnitud de los desplazamientos es de 17 metros.

2.6. Producto de vectores

También podemos expresar muchas relaciones físicas de forma concisa usando producto de vectores. Los vectores no son números ordinarios, así que no podemos aplicarles directamente la multiplicación ordinaria. Definiremos dos tipos diferentes de producto de vectores. El primero, producto escalar, produce un resultado escalar. El segundo, producto vectorial, produce otro vector (Tipler, A. 1998).

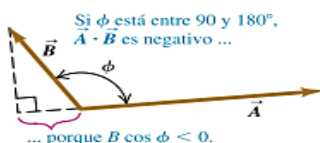
2.6.1. Producto escalar

El producto escalar o producto punto de dos vectores, es igual al producto de los módulos de los vectores dados, por el coseno del menor ángulo que forman entre sí:



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \phi$$

El producto escalar se representa intercalando un punto (.) entre los símbolos de los vectores. El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



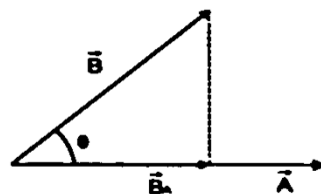
Despejando la ecuación obtenemos el ángulo formado por dos vectores:

$$\cos \phi = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{A \cdot B}$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B}$$

Para el cálculo de la proyección de un vector sobre otro tenemos:

$$\cos \theta = \frac{\vec{B}_A}{B}$$



$$\vec{B}_A = B \cdot \cos \theta$$

$$\vec{A}_B = A \cdot \cos \theta$$

Producto escalar usando componentes

Podemos calcular el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ directamente las componentes x , y y z de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para saber cómo se hace, obtengamos primero los productos escalares de los vectores unitarios. Esto es fácil, $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ tienen magnitud 1 y son perpendiculares entre sí.

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$. Ahora expresaremos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, expandimos el producto y usamos estos productos de vectores unitarios.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x \vec{i} \cdot \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \cdot \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &\quad + A_y B_x \vec{j} \cdot \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \cdot \vec{j} + A_y B_z \vec{j} \cdot \vec{k} \\ &\quad + A_z B_x \vec{k} \cdot \vec{i} + A_z B_y \vec{k} \cdot \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

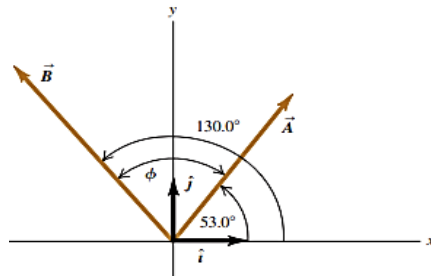
Es evidente que de las ecuaciones seis de estos nueve términos son cero, y los otros tres que quedan son.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Podemos decir, que el producto escalar de dos vectores es la suma de los productos de sus respectivas componentes.

Ejemplo 13.

Calcule el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de los dos vectores de la figura. Las magnitudes de los vectores son $A = 4 \text{ m}$ y $B = 5 \text{ m}$.



Datos

$$A = 4 \text{ m y } \alpha = 53^\circ$$

$$B = 5 \text{ m y } \alpha = 130^\circ$$

$$\theta = 130^\circ - 53^\circ = 77^\circ$$

Solución

Primer caso

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (4 \text{ m}) (5 \text{ m}) \cos 77^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \mathbf{4,50 \text{ m}}$$

Segundo caso

$$A_x = (4 \text{ m}) \cos 53^\circ = \mathbf{2,407 \text{ m}}$$

$$A_y = (5 \text{ m}) \sin 53^\circ = \mathbf{3,195 \text{ m}}$$

$$A_z = \mathbf{0}$$

$$B_x = (5 \text{ m}) \cos 130^\circ = \mathbf{-3,214 \text{ m}}$$

$$B_y = (5 \text{ m}) \sin 130^\circ = \mathbf{3,830 \text{ m}}$$

$$B_z = \mathbf{0}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2,407 \text{ m}) (-3,214 \text{ m}) + (3,195) (3,830 \text{ m}) + (0) (0)$$

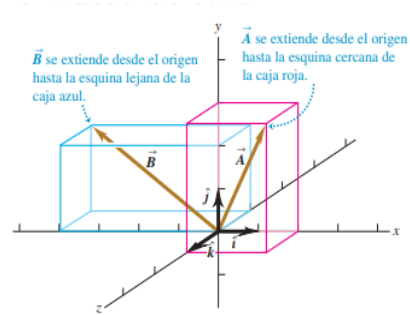
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -7,74 \text{ m}^2 + 12,24 \text{ m}^2 + 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \mathbf{4,50 \text{ m}}$$

Ejemplo 14.

Determine el ángulo entre los dos vectores de la figura, si sus componentes son:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \text{ y } \vec{B} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$



Datos

Tenemos componentes x, y, z de los 2 vectores.

Solución

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$A = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

$$B = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\cos \phi = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{A \cdot B}$$

$$\cos \phi = \frac{(2)(-4) + (3)(2) + (1)(-1)}{\sqrt{14}\sqrt{21}}$$

$$\cos \phi = \frac{-3}{17,15}$$

$$\cos \phi = -0,175$$

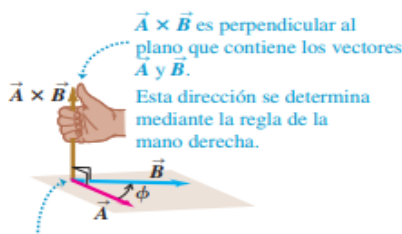
$$\phi = 100^\circ$$

El producto $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es negativo, lo que significa que ϕ está entre 90° y 180°

2.6.2. Producto vectorial

El producto vectorial $\vec{A}$ y $\vec{B}$, también llamado cruz, se denota con $\vec{A} \times \vec{B}$. Como su nombre lo indica, el producto vectorial es otro vector $\vec{C}$, cuyo módulo se obtiene multiplicando los módulos de A y B por el seno del ángulo menor formado entre ellos. Su dirección es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y su sentido está dado por la

regla del sacacorchos, que dice: se hace girar el primer vector de la operación hacia el segundo, por el camino más corto, y el sentido del vector resultante será el avance radial del sacacorchos. Usaremos este producto en la cantidad de movimiento angular. (Tipler, A. 1998).



El producto vectorial se representa intercalando el signo (x) entre los símbolos de los vectores. Para definir el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Así los dos vectores están en un plano. Definimos el producto vectorial como una cantidad vectorial perpendicular a este plano, es decir, perpendicular tanto de $\vec{A}$ como de $\vec{B}$, como una cantidad igual a $AB \sin \phi$. Esto es, si $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, entonces tenemos.

$C = AB \sin \phi \text{ (magnitud del producto vectorial cruz de } \vec{A} \text{ y } \vec{B})$
--

Puesto que $\sin 0^\circ = 180^\circ = 0$ y $\sin 90^\circ = 1$. De $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$, se concluye que:

a) El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo ($\vec{U}_A = \vec{U}_B$).

$$\vec{A} \times \vec{B} = A.B. \sin 0^\circ$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = A.B (0)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0$$

b) El producto vectorial es máximo cuando los vectores son perpendiculares:

$$\vec{A} \times \vec{B} = A.B. \sin 90^\circ$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = A.B(1)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = A.B$$

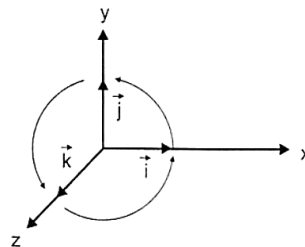
Cálculo del producto vectorial usando componentes

Si conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podremos calcular las componentes del producto vectorial usando un procedimiento similar al del producto escalar. Primero deducimos la tabla de multiplicar de los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$, que son mutuamente perpendiculares. El producto cruz de cualquier vector consigo es cero, así que:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Es cero, cada producto es un vector cero; es decir, uno con todas sus componentes iguales a cero y con dirección indefinida. Usando las ecuaciones, y la regla de la mano derecha tenemos.

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}\end{aligned}$$



En el ciclo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, es el producto vectorial de dos de ellos equivale a que le sigue en el ciclo del **sistema de coordenadas derecho**. Todos los productos vectoriales de $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ tendrían signos opuestos a las de las ecuaciones. (Young, H. et al. 2009).

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes y los vectores unitarios correspondientes, y expandimos la expresión del producto cruz:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \\ \vec{A} \times \vec{B} &= A_x \vec{i} \times B_x \vec{i} + A_x \vec{i} \times B_y \vec{j} + A_x \vec{i} \times B_z \vec{k} \\ &\quad + A_y \vec{j} \times B_x \vec{i} + A_y \vec{j} \times B_y \vec{j} + A_y \vec{j} \times B_z \vec{k} \\ &\quad + A_z \vec{k} \times B_x \vec{i} + A_z \vec{k} \times B_y \vec{j} + A_z \vec{k} \times B_z \vec{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ están dadas por.

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y \quad C_y = A_x B_z - A_z B_x \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

(Componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$)

El producto cruz también puede expresarse en forma de determinantes:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$(A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

Solo utilizaremos **sistema de coordenadas derecho**, a lo largo de este libro.

Ejemplo 15.

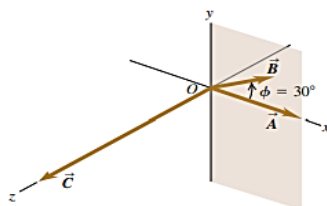
El vector $\vec{A}$ tiene 6 unidades y esta sobre el eje +x. $\vec{B}$ tiene una magnitud de 4 unidades y está en el plano xy formado por un ángulo de 30° con el eje +x, como indica la figura. Calcule el producto cruz de $\vec{A} \times \vec{B}$.

Datos

A = 6 unidades

B = 4 unidades

$\phi = 30^\circ$



Solución

El producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, aplicando la ecuación la magnitud del producto cruz es.

$$C = AB \sin \phi = (6)(4)(\sin 30^\circ) = 12$$

Por la regla de la mano derecha, $\vec{A} \times \vec{B}$ tiene la dirección del eje +z; por lo tanto, $\vec{A} \times \vec{B} = 12\vec{k}$

Ejemplo 16.

Sean los vectores $\vec{A} = (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$ y $(\vec{B} = 5\vec{i} + 5\vec{j})$. Calcular:

a. El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$

b. El área del paralelogramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Datos

$$\vec{A} = (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{B} = (5\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = ?$$

Solución

a)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Sustituyendo el valor de las componentes de los 2 vectores

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (0 + 5)\vec{i} - (0 + 5)\vec{j} + (15 - 10)\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

b) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es el módulo del producto vectorial de ambos:

$$\text{Área} = |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2 + (5)^2}$$

$$\text{Área} = 8,66 \text{ u}^2$$

Ejemplo 17.

Dado los vectores $\vec{A} = (45 \text{ cm}; 20^\circ)$; $\vec{B} = (-12\vec{i} - 38\vec{j})\text{cm}$ y $\vec{C} = 52 \text{ cm}(-0,459\vec{i} + 0,888\vec{j})$, hallar:

a) $\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C}$

d) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

b) $3\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$

e) El ángulo comprendido entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$

c) $\vec{C} \times \vec{A}$

f) La proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{C}$

g) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Datos

$$\vec{A} = (45 \text{ cm}; 20^\circ) = (42,29\vec{i} + 15,39\vec{j})\text{cm}$$

$$\vec{B} = (-12\vec{i} - 38\vec{j}) \text{ cm} = (39,85 \text{ cm}; 252,47^\circ)$$

$$\vec{C} = 52 \text{ cm} (-0,459\vec{i} + 0,888\vec{j}) = (-23,87\vec{i} + 46,18\vec{j}) \text{ cm} = (52 \text{ cm}; 117,33^\circ)$$

Solución

a) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C}$

Método de las componentes

Distancia	Ángulo	Componente x	Componente y
A = 45 cm	20°	42,29 cm	15,39 cm
B = 39,85 cm	252,47°	-12 cm	-38 cm
C = 52 cm	117,33°	-47,74 cm	92,36 cm
		-17,45 cm	69,75 cm

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2$$

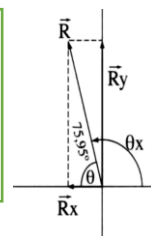
$$R = \sqrt{(-17,45)^2 + (69,75)^2}$$

$$R = \sqrt{5169,565} = \mathbf{71,9 \text{ cm}}$$

$$\tan \theta = \frac{17,45 \text{ cm}}{69,75 \text{ cm}}$$

$$\tan \theta = 0,250179$$

$$\theta = 14,05^\circ + 90^\circ = \mathbf{104,05^\circ}$$



$$\vec{R} = (R; \theta)$$

$$\vec{R} = \mathbf{(71,9 \text{ cm}; 140,05^\circ)}$$

b) $3\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$

Método de las componentes

Distancia	Ángulo	Componente x	Componente y
A = 45 cm	20°	126,87 cm	46,17 cm
B = 39,85 cm	252,47°	+12 cm	+38 cm
C = 52 cm	117,33°	-23,87 cm	46,18 cm
		115 cm	130,35 cm

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2$$

$$R = \sqrt{(115)^2 + (130,35)^2}$$

$$R = \mathbf{173,8 \text{ cm}}$$

$$\tan \theta = \frac{130,35 \text{ cm}}{115 \text{ cm}}$$

$$\tan \theta = 0,250179$$

$$\theta = \mathbf{48,6^\circ}$$

$$\vec{R} = (R; \theta)$$

$$\vec{R} = (R; \theta)$$

$$\vec{R} = (173,8 \text{ cm}; 48,6^\circ)$$

$$c) \vec{C} \times \vec{A}$$

$$\vec{C} \times \vec{A} = (C_x \cdot C_y - C_y \cdot A_x) \vec{k}$$

$$\vec{C} \times \vec{A} = [(-23,87)(15,39) - (46,18)(42,29)] \vec{k}$$

$$\vec{C} \times \vec{A} = (-367,36 - 1952) \vec{k}$$

$$\vec{C} \times \vec{A} = -2320,31 \vec{k}$$

$$d) \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = [(42,29)(-12) + (15,39)(-38)] \text{ m}^2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-507,48 - 584,82) \text{ m}^2$$

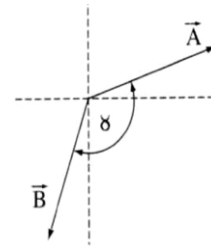
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -1092,3 \text{ m}^2$$

$$e) \text{ El ángulo comprendido entre } \vec{A} \text{ y } \vec{B}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B}$$

$$\cos \theta = \frac{-1092,3 \text{ m}^2}{(45 \text{ m})(39,85 \text{ m})} = -0,600118$$

$$\theta = 127,53^\circ$$



$$f) \text{ La proyección de } \vec{B} \text{ sobre } \vec{C}$$

Primero calculamos el ángulo comprendido entre estos vectores.

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = B_x \cdot C_x + B_y \cdot C_y$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = [(-12)(-23,87) + (-38)(46,18)] \text{ m}^2$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = (286,44 - 1754,84) \text{ m}^2 = -1468,4 \text{ m}^2$$

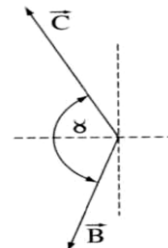
$$\cos \theta = \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{B \cdot C}$$

$$\cos \theta = \frac{-1468,4 \text{ m}^2}{(39,85 \text{ m})(52 \text{ m})} = -0,708619 = 135,12^\circ$$

$$\vec{B}_C = B \cdot \cos \theta \cdot \vec{U}_C$$

$$\vec{B}_C = 39,85 \text{ m} (-0,708619) (-0,459 \vec{i} + 0,888 \vec{j})$$

$$\vec{B}_C = (12,96 \vec{i} - 25,08 \vec{j}) \text{ m}$$



g) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x) \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = [(42,29)(-38) - (15,39)(-12)] \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-1600,02 + 184,68) \vec{k} = -1422,34 \vec{k}$$

$$\text{Área} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$\text{Área} = 1422,34 \text{ m}^2$$

Ejercicio 4

1. Al oír el cascabel de una serpiente, usted realiza dos desplazamientos rápidos de 1,8 metros al norte y 2,4 metros al este. Haga un dibujo (a escala) que muestren tales desplazamientos de una resultante de magnitud

2. Un empleado postal conduce su camión y realiza los siguientes desplazamientos: 26 km al norte, posteriormente 4 km al este y finalmente (3,1 km; NE). Determine la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante dibujando un diagrama a escala.

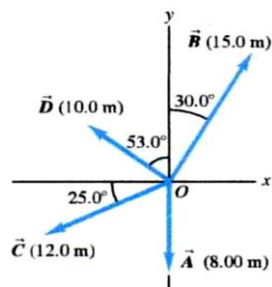
3. Dado el vector $\vec{C} = (7 \text{ m}; 36^\circ)$ y el vector $\vec{D} = 4 \text{ m } (0,564\vec{i} + 0,826\vec{j})$. Halle:

a) $\vec{C} + \vec{D}$

b) $\vec{C} - \vec{D}$

c) $\frac{1}{2} \vec{D}$

4. Calcule las componentes x e y de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la figura.



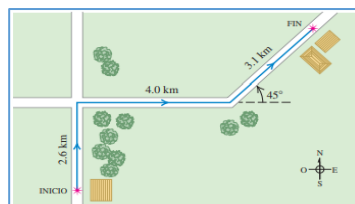
5. Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura, use el método de componentes para obtener la magnitud y la dirección de:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) $\vec{A} - \vec{B}$

6) Un cohete enciende dos motores simultáneamente. Uno produce un empuje de 725 N directamente hacia delante; mientras que el otro da un empuje de (513 N; 57,6°) arriba de la dirección hacia adelante. Obtenga la magnitud y la dirección hacia adelante de la fuerza resultante que estos motores ejercen sobre el cohete.

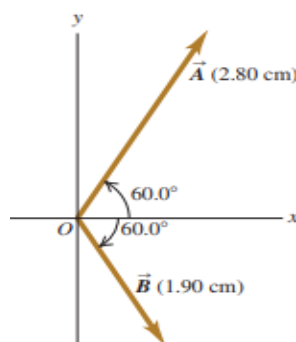
7) Un empleado postal conduce su camión por la ruta de la figura. Use el método de componentes para determinar la magnitud y la dirección de su desplazamiento resultante. En un diagrama de suma de



vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el método obtenido de componentes.

8) Un profesor de física desorientado conduce 3,25 km al norte, 4,75 al oeste y 1,50 km al sur. Calcule la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante, usando el método de componentes. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido del método de componentes.

9) El vector $\vec{A}$ mide 2,80 cm y está 60° sobre el eje x en el primer cuadrante. El vector $\vec{B}$ mide 1,90 cm y está 60° bajo el eje x en el cuarto cuadrante como indica la figura. Utilice las componentes para obtener la magnitud y la dirección de:



a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) $\vec{A} - \vec{B}$

En cada caso dibuje la suma y resta de vectores, y demuestre que sus respuestas numéricas concuerdan cuantitativamente con el dibujo.

10) Dado los vectores $\vec{F} = (30 \text{ m}; \text{SE})$ y $\vec{H} = (-25\vec{i} - 38\vec{j}) \text{ m}$. Calcular:

a) $3\vec{H}$

b) $\vec{H} \times \vec{F}$

c) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{H}$ y $\vec{F}$

11) Dado los vectores $\vec{D} = (5 \text{ m}; 63^\circ)$, $\vec{E} = (-7; -1) \text{ m}$ y $\vec{F} = (4 \text{ m}; \text{S}70^\circ\text{E})$. Calcular:

a) $2\vec{D} + \vec{E} + 3\vec{F}$

b) $\vec{D} \cdot \vec{E}$

c) La proyección de $\vec{E}$ sobre $\vec{D}$.

d) El ángulo comprendido entre $\vec{E}$ y $\vec{F}$

12) Dado los vectores $\vec{B} = (3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ y $\vec{C} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$. Hallar:

a) Los módulos de $\vec{B}$ y $\vec{C}$

b) El producto vectorial de $\vec{B}$ y $\vec{C}$

c) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{B}$ y $\vec{C}$

2.7. Vector posición relativa

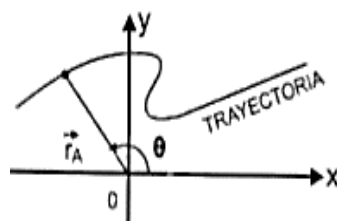
Vector posición

En física, la posición, o vector posición de un cuerpo respecto a un sistema de referencia se define como el vector que une el lugar ocupado por el cuerpo con el origen del sistema de referencia, la posición A que ocupa una partícula en movimiento en un tiempo t , elegimos un sistema de referencia fijo Oxy , y trazamos el vector posición $\vec{r}_A$, que une el origen de sistema de referencia con el punto

A.

El vector $\vec{r}_A$ al estar definido por su módulo (r) y su dirección (θ) con respecto a los ejes de referencia, determina la dirección de una partícula respecto a dichos ejes.

Matemáticamente r_A se expresa por:



$$\vec{r}_A = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$$

Significado

$\vec{r}_A$ = **Vector posición** en un punto.

x, y, z = **Coordenadas** del vector posición.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ = **Vectores unitarios** en las direcciones de los ejes Ox , Oy y Oz .

La unidad de medida de la posición en el sistema internacional es el metro (m). Como todo vector, el vector posición en física tiene modulo, dirección y sentido. El módulo del vector es la distancia que separa la partícula del sistema de referencia. Para su cálculo se utiliza la siguiente fórmula:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En el caso en que sólo estés trabajando con dos dimensiones, puedes simplificar en la formula eliminando la componente z (Jackson, H.; Wirtz, G. 2009).

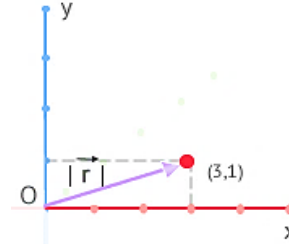
Ejemplo 1.

Hallar el vector posición y su módulo del siguiente punto de la figura.

Datos

P (3; 1)

Solución



$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} \\ \vec{r}_A &= 3\vec{i} + \vec{j}\end{aligned}$$

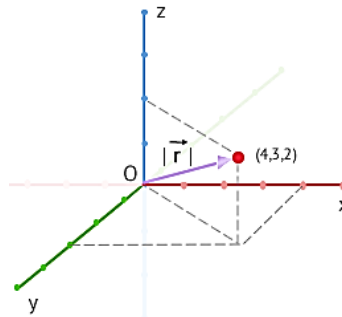
$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2 \\ r &= \sqrt{(3)^2 + (1)^2} \\ r &= \sqrt{10} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{3,16}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Hallar el vector posición y su módulo del siguiente punto de la figura.

Datos

P (4; 3; 2)



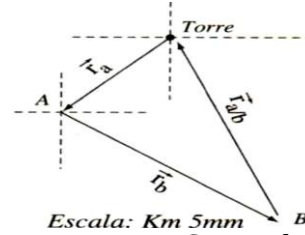
Solución

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} \\ \vec{r}_A &= 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\end{aligned}$$

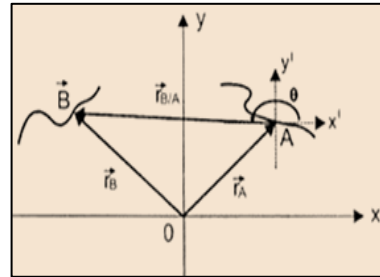
$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ r &= \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (2)^2} \\ r &= \sqrt{29} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{5,39}\end{aligned}$$

Vector posición relativa

El vector posición se utiliza un sistema de referencia fijo. Existen situaciones en las que se utilizan simultáneamente varios sistemas de referencia, por lo que un mismo punto puede tener tantas posiciones como puntos de referencia se escojan. Si uno de ellos está ligado a tierra, diremos que es un sistema de referencia fijo, y los demás serán sistemas móviles de referencia (Serway, A.; Jewett, J. 2005).



Consideremos las partículas $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que se mueven en el plano Oxy. Los vectores $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ definen sus posiciones con respecto al sistema de referencia en un instante t. La posición de la partícula A y B se refieren a dos partículas diferentes que se mueven en un mismo instante y con referencia a un mismo punto.



La posición de la partícula B respecto a la partícula $\vec{A}$ ($\vec{r}_{B/A}$) es una cantidad vectorial porque tiene una magnitud (la distancia entre las dos partículas) y una dirección (θ) con respecto al sistema móvil $Ax'y'$.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

Ejemplo 3.

Un avión recorre 200 km hacia el oeste de su base y luego 150 km al N30°O. Determinar:

- La posición final del avión.
- La dirección de la posición final.
- La distancia del avión a la base.

Datos

$$\vec{r}_A = (200 \text{ km}; 180^\circ) = (-200\vec{i} + 0\vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_B = (150 \text{ km}; 120^\circ) = (-75\vec{i} + 129,9\vec{j}) \text{ km}$$

Esc: mm = 5 km

Solución

$$a) \vec{R} = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{R} = (-200\vec{i} + 0\vec{j} - 75\vec{i} + 129,9\vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{R} = (-275\vec{i} + 129,9\vec{j}) \text{ km. La posición final}$$

$$b) \tan \theta = \frac{R_x}{R_y}$$

$$\tan \theta = \frac{275 \text{ km}}{129,9 \text{ km}} = 2,117013 = 64,72^\circ$$

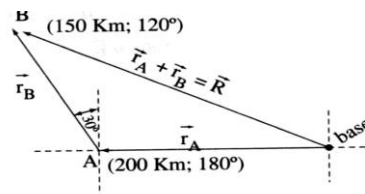
Dirección N64,72°O

$$c) d^2 = R_x^2 + R_y^2$$

$$d = \sqrt{(-275 \text{ km})^2 + (129,9 \text{ km})^2}$$

$$d = \sqrt{92499,01 \text{ km}^2}$$

$$d = 304,14 \text{ km. distancia recorrida}$$



Ejemplo 4.

Un avión de guerra está a (4 km; SO) de la torre de control. En ese momento el piloto desea impactar en un blanco que está ubicado en el punto (6; -4) km. Determinar:

- La posición del avión respecto al blanco.
- La dirección que debe tomar el avión para lograr su propósito.
- La distancia del avión al blanco.

Datos

$$\vec{r}_a = (4 \text{ km}; \text{SO}) = (4 \text{ km}; 225^\circ) = (-2,83\vec{i} - 2,83\vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_b = (6; -4) \text{ km} = (7,21 \text{ km}; 326,31^\circ) = (6\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ km}$$

Solución

$$a) \vec{r}_{a/b} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$$

$$\vec{r}_{a/b} = (-2,83\vec{i} - 2,83\vec{j}) \text{ km} - (6\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_{a/b} = (-8,83\vec{i} + 1,17\vec{j}) \text{ km.}$$

$$b) \tan \theta = \frac{R_x}{R_y}$$

$$\tan \theta = \frac{8,83 \text{ km}}{1,17 \text{ km}} = 7,547008 = 82,45^\circ$$

Rumbo N82,45°O

$$c) d^2 = R_x^2 + R_y^2$$

$$d_{a/b} = \sqrt{(-8,83 \text{ km})^2 + (1,17 \text{ km})^2}$$

$$d_{a/b} = \sqrt{79,34 \text{ km}^2}$$

$d_{a/b} = 8,91 \text{ km.}$ distancia del avión al blanco.

2.8. Espacio vectorial

Definición de espacio vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados **vectores**, en el que se han definido dos operaciones: la suma y el producto por un escalar (número real) sujetas a propiedades que se dan a continuación. Las propiedades deben ser válidas para todos los vectores u, v y w en V y en todos los escalares α y β reales.

Llamamos $u + v$ a la suma de vectores en V , y $\alpha \cdot v$ al producto de un número real α por un vector $v \in V$. (Del Valle, J. 2012).

Propiedades

Si $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces se tiene las siguientes propiedades:

1. Propiedad asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. Propiedad Conmutativa: $u + v = v + u$
3. Existe un elemento neutro: $v + 0 = v$
4. Existe un elemento opuesto o inverso: $v + (-v) = 0$

Propiedades del producto de un vector por un escalar

5. Propiedad asociativa: $\alpha (\beta v) = (\alpha \beta) v$

6. Propiedad distributiva: Sobre la suma de vectores: $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$

7. Propiedad distributiva: Sobre la suma de escalares: $v (\alpha + \beta) = \alpha v + \beta v$

8. Existe un elemento unidad: $1 v = v$

Llamamos $u + v$ a la suma de vectores en V , y αv al producto de un número real α por un vector $v \in V$.

Vectores en R^n

Un vector en el n -espacio es representado por un n -tuple ordenado: Un par ordenado: (x_1, x_2) .

Un triple ordenado: (x_1, x_2, x_3) .

Un cuádruple ordenado: (x_1, x_2, x_3, x_4) .

Un n -tuple ordenado: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

$R^1 = 1$ espacio, conjunto de todos los números reales.

$R^2 = 2$ espacio, conjunto de todos los pares ordenados de números reales. R^3

$= 3$ espacio, conjunto de todos los triples ordenados de números reales.

$R^4 = 4$ espacio, conjunto de todos los cuádruples ordenados de números reales.

$R^n = n$ espacio, conjunto de todos los n -tuples ordenados de números reales.

Un n -tuples ordenado $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, puede ser considerado como un punto en R^n con los x , como coordenadas o bien puede ser considerado como un vector:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Vector en R^n

Operaciones estándar en R^n

Sean $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \in R^n$.

Sea α un número real.

La suma de u y v está definida por el vector:

$$u + v = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) + (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n)$$

La multiplicación de v por α está definida por el vector:

$$\alpha v = \alpha(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

$$\alpha v = \alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3, \dots, \alpha v_n$$

El espacio vectorial es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío; una operación interna (suma definida para los elementos del conjunto) y una operación externa (llamada producto por un escalar definida entre dicho conjunto y un cuerpo matemático). El espacio vectorial se denota por: $(V, +, \cdot)$, o simplemente $(V, +, \cdot)$. Las dos operaciones tienen sus propias propiedades.

Suma de dos elementos de V

Si $u, v \in V$, entonces $u + v \in V$.

Producto por un número real

Si $\alpha \in R$ y $v \in V$, entonces $\alpha \cdot v \in V$

Se dice que $(V, +, \cdot)$, es un espacio vectorial sobre R si las operaciones cumplen con las siguientes propiedades:

Asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$

Conmutativa: $u + v = v + u$

Elemento neutro: es un vector al que llamaremos 0 tal que si $v \in V$, entonces $v + 0 = v$.

Elemento opuesto: para todo vector $v \in V$, existe un vector al que llamaremos opuesto y designaremos como:

$-v \in V$, tal que: $v + (-v) = 0$

Producto por un número real

Asociativa: $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

Elemento unidad: Si $v \in V$, entonces $1 \cdot v = v$

Las matrices del orden $m \times n$, k -espacios vectorial es $k_{m \times n}$ ($k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) el conjunto de matrices m filas n columnas cuyas componentes son elementos de k , con la suma y producto por escalares usuales:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

Producto de un número real por una matriz

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}.$$

El elemento neutro es la matriz nula, que es aquella cuyos elementos son todos nulos y el opuesto de una matriz A de componentes a_{ij} es la matriz B de componentes a_{ij} es la matriz B de componente $b_{ij} = -a_{ij}$.

$\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares de números reales.

Ejemplo 5.

$(3, 5); (-2, \frac{1}{2})$

$\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todas las ternas de números reales.

Ejemplo 6.

$(3, \frac{1}{4}, -4); (2, -\frac{1}{2}, 5)$

Definición de Subespacios vectoriales

Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V .

W un **subespacio** de V si W es en sí mismo un espacio vectorial con las mismas operaciones (suma de operaciones y producto por un escalar) definidas en V . (Del Valle, J. 2012).

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar Subespacios

Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V ($W \subseteq V$). Se lee W está incluido en V .

W es subespacio de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) 0_V está en W .
- b) Si u y v están en W , entonces $u + v$ está en W .
- c) Si u está en W y K es un escalar, Ku está en W .

Ejemplo 7.

Consideremos el conjunto $W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$. Es decir, la recta de ecuación $x = 0$. ¿Es subespacio de $\mathbb{R}^2$?

Solución

Se cumple (a) pues $(0, 0) \in W$

Se cumple (b) pues la suma de dos vectores de W , está en W :

$$(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2).$$

Se cumple (c) pues el producto de un vector de W por un número real está en W :

$$k(0, y) = (0, ky)$$

Luego W es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 8.

Consideremos el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$. ¿Es subespacio de $\mathbb{R}^2$?

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = x \vee x = -y$$

Se cumple (a) pues $(0, 0) \in W$

No se cumple (b) porque la suma de dos vectores de W , puede no estar en W , por ejemplo:

$$(1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin W$$

Entonces W no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 9.

Consideremos el conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$.

Es decir, un plano que pasa por el origen ¿Es subespacio de $\mathbb{R}^3$?

De la ecuación del plano se deduce $x = -y - 2z$

Por lo tanto los vectores que pertenecen a W responden a la forma $(-y - 2z, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}$.

Se cumple (a) pues $(0, 0, 0) \in W$

Se cumple (b) pues la suma de dos vectores del plano sigue estando en el plano:

$$(-y - 2z, y, z) + (-y' - 2z', y', z')$$

$$[-(y + y') - 2(z + z'), y + y', z + z']$$

Se cumple (c) pues $k(-y - 2z, y, z) = (-ky - 2kz, ky, kz) \in W$

Entonces W es subespacio de

Después de estos ejemplos podemos resumir cuales son los diferentes tipos de subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Subespacios de $\mathbb{R}^2$	Subespacios de $\mathbb{R}^3$
- $\{(0, 0)\}$ - Rectas que pasan por el origen. - $\mathbb{R}^2$ (como subespacio de sí mismo)	- $\{(0, 0, 0)\}$ - Rectas que pasan por el origen. - Planos que pasan por el origen. - $\mathbb{R}^3$ (como subespacio de sí mismo)

No hay ninguna otra clase de subespacios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5

1. Dado los puntos A (4; - 5) m y B (8; - 3) m. Determinar:
 - a) Los vectores posición de A y B.
 - b) La posición relativa de A con respecto a B.
 - c) La distancia entre los puntos A y B.
2. Dado los puntos A (1; 4) m, B (-5; 2) m y C (-4; -3). Determinar:
 - a) Los vectores posición de A, B y C
 - b) El perímetro del triángulo ABC.
 - c) Los ángulos del triángulo ABC.
3. Las coordenadas de los puntos inicial y final de un vector $\vec{A}$ son (3; 5) m y (-4; 7) m, respectivamente. Determinar:
 - a) Las componentes del vector.
 - b) El módulo.
 - c) El vector unitario.
 - d) La dirección.
4. Se tira un bloque con una fuerza de 25 N aplicada a una cuerda inclinada 30° por encima de la horizontal. Determinar:
 - a) ¿Cuál es la componente de la fuerza que tira el bloque?
 - b) ¿Cuál es la componente de la fuerza que tiende a levantar verticalmente el bloque?
5. La posición de una ciudad P respecto a la ciudad Q es (60 km; $S65^\circ E$). Otra ciudad R se halla localizada, con respecto a P, en la posición (110 km; $N15^\circ O$). Determinar:
 - a) La posición de R respecto a Q.
 - b) La distancia entre R y Q.
6. Una montaña se encuentra en un punto (-3; 2) km, con respecto a una persona. La persona gira y divisa un caballo a (50 km; $S30^\circ E$) Determinar:
 - a) La posición de la montaña respecto al caballo.
 - b) La distancia entre la montaña y el caballo.
 - c) El ángulo que existe entre los vectores posición de la montaña y el caballo.

7. $\mathbf{S} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0 \}$. ¿Es subespacio de $\mathbb{R}^2$?
8. $\mathbf{W} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$. ¿Es subespacio de $\mathbb{R}^2$?
9. $\mathbf{W} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \}$. ¿Es subespacio de $\mathbb{R}^3$?
10. $\mathbf{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot z = -1 \}$. ¿Es subespacio de $\mathbb{R}^3$?

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 1

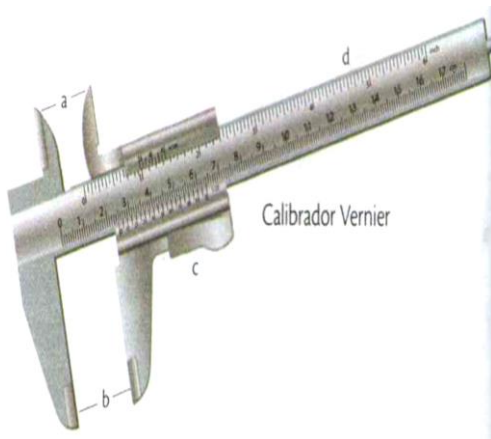
MEDICIÓN DE LONGITUDES CON CALIBRADOR

Objetivo

Utilizar el calibrador o pie de rey como instrumento de medida de precisión de pequeñas longitudes.

Fundamento teórico

El calibrador llamado también Vernier en honor de su inventor, consta esencialmente de una regla grande (d) graduada en cm y mm sobre la cual se desliza una reglilla pequeña (c) para cuya graduación se ha tomado una distancia de 9 mm y se ha dividido en 10 partes iguales,



con lo que la aproximación de la medida será de 0,1 de mm. Tiene dos toques grandes (b) para medir diámetros externos, en el lado opuesto a estos hay dos toques pequeños (a) para medir diámetros internos y en el otro extremo (e) una lámina metálica para medir pequeñas profundidades. En el gráfico adjunto, las escalas superiores corresponden a pulgadas y las escalas inferiores a milímetros (mm). Para realizar la medición del grosor de un objeto se lo coloca entre los toques grandes y luego se hace la lectura en mm en la regla grande con respecto al punto 0 de la reglilla. A continuación, se observa cuál de las líneas de la reglilla coincide con una de la grande y su valor será en décimas de mm.

Los calibradores actuales, las reglillas están dividida en 20 partes con lo que la aproximación es de 0,05 mm o en 50 partes, siendo la aproximación de 0,02 mm. (Álvarez, M. et al. 2011).

Materiales

- Calibrador o pie de rey
- Diversos cuerpos de prueba para realizar las medidas: tacos de madera, tuercas, trozos de tubo o frascos pequeños, etc. Libreta de apuntes.

Procedimiento

1. Toma un objeto de prueba y colócalo entre los topes grandes del calibrador, como indica el gráfico. Lee la longitud en las dos escalas del vernier. Anota su valor en la tabla adjunta.



Cuerpo 1	Cuerpo 2	Cuerpo 3

2. Toma un trozo de manguera o de tubo y mide su diámetro interior, utilizando los topes pequeños, como indica el gráfico adjunto. Anota el valor en la tabla.



Cuerpo 1	Cuerpo 2	Cuerpo 3

3. Mide la profundidad de un frasco pequeño introduciendo la varilla del cursor del calibrador, como indica la figura. Anota el valor en la tabla.



Cuerpo 1	Cuerpo 2	Cuerpo 3

4. Repite los procedimientos anteriores con otros tres objetos de grosor, diámetro y profundidad diferente y anota los valores en las tablas.

Conclusiones

Sin en lugar del calibrador hubiera empleado una regla graduada,

¿tendrías los mismos resultados? ¿Por qué?

¿Son exactas las medidas que tomaste? ¿Por qué?

¿Quiénes utilizan con mayor frecuencia el calibrador?

¿Cumpliste con el objetivo de esta práctica de laboratorio?

Laboratorio virtual en casa

Si quieres practicar con un laboratorio virtual en casa, ingresa a la siguiente dirección:

<http://www.maclasa.com/calibre/index.htm>

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 2

VOLUMEN DE CUERPOS IRREGULARES

Objetivo

Determinar el volumen de un cuerpo irregular utilizando una probeta graduada con agua.

Fundamento teórico

Cuando te zambulles en una piscina, tu cuerpo desplaza una cantidad de agua exactamente igual al volumen de tu cuerpo. Este efecto físico sencillo te puede ayudar a encontrar el volumen de un cuerpo cualquiera, si lo introduces en un recipiente graduado que contenga agua. Debes recordar que un milímetro de agua es igual a un centímetro cúbico (cm^3). Por ejemplo, si el cuerpo ha desplazado, 15 mililitro (ml) de agua, significa que tiene un volumen de 15 cm^3 . (Álvarez, M. et al. 2011).

Materiales

- Probeta graduada de 500 ml
- Soporte universal.
- Varilla metálica de 60 cm de longitud.
- Pinza con gancho
- Polvo colorante
- Carrete de hilo
- Diferentes cuerpos de prueba.
- Un trozo de franela (para limpiar).
- Vaso de precipitación de 300 ml.



Procedimiento

1. Forma un equipo de cuatro personas.
 2. Coloca en el vaso de precipitación unos 200 ml de agua y mezcla con un poco de polvo colorante.
 3. Vierte los 200 ml de agua coloreada en la probeta graduada.
- Comprueba que el nivel de agua indique 200 ml.

4. Amarra en el gancho de la pinza un trozo de hilo de unos 30 cm de longitud.
5. Sujeta el cuerpo, cuyo volumen vas a medir, en el extremo libre del hilo.
6. Introduce cuidadosamente el cuerpo en la probeta hasta que el agua lo cubra totalmente.
7. Lee el valor que indica ahora el nivel superior del agua y anótalo en la tabla.
8. Repite los procedimientos anteriores con otros cuerpos de prueba.

V. de agua	C.1	C.2	C.3
200 ml			

Conclusiones

Para encontrar el volumen del cuerpo, debes restar el volumen de agua alcanzado al introducir el cuerpo, menos los 200 ml originales.

¿Te parece exacta esta manera de medir el volumen de un cuerpo irregular? ¿Por qué?

¿Es posible calcular matemáticamente el volumen de un cuerpo irregular? Explica tu respuesta.

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 3

CÁLCULO DE MASA DE UN CUERPO

Objetivo

Determinar la masa de un cuerpo utilizando una balanza manual de laboratorio de un solo platillo.

Fundamento teórico

Para determinar la masa de un cuerpo se han utilizado desde la antigüedad diversos tipos de balanza. Desde la más sencilla, llamada balanza en cruz que tiene dos platillos para en el uno colocar la masa de referencia y en el otro la masa cuyo valor se desea medir, hasta las más sofisticadas que son las balanzas electrónicas de precisión. En esta práctica trabajarás con una balanza manual de mucha exactitud, que se la utiliza generalmente en los laboratorios de física. Como puedes observar en el gráfico, estas balanzas tienen un solo platillo y hacia la derecha tres escalas. La escala inferior tiene un rango de medición hasta 500 gramos (g) la escala media tiene un rango de 100 g y la superior tiene un rango de medición de 10 g. En cada escala hay una pesa deslizante que sirve para equilibrar la balanza, y debe coincidir con la línea marcada en el tope. (Álvarez, M. et al. 2011).

Materiales

- Balanza de laboratorio.
- Diversos cuerpos de prueba.

Procedimiento

1. Antes de comenzar la medición con la balanza debes encerar la balanza. Por eso, desplaza las tres pesas deslizantes de las escalas totalmente a la izquierda, de tal modo que el fiel coincida con la línea marcada del tope. En caso de que no coincida, nuevamente lentamente el tornillo situando a la izquierda de la balanza debajo del platillo.



2. Coloca cuidadosamente el cuerpo cuya masa vas a medir sobre el platillo.
3. Desplaza lentamente la pesa deslizante de la escala inferior, hasta que el fiel se mueva hacia abajo.
4. Luego retrocede a la muesca anterior para que el fiel quede hacia arriba de la señal.
5. Realiza ahora el mismo procedimiento anterior en la escala intermedia.
6. Finalmente trabaja con la escala superior hasta que el fiel coincida exactamente con la señal del tope.
7. Suma los valores indicados por las pesas deslizantes y tendrás el valor de la masa del cuerpo. Por ejemplo: si la pesa deslizante inferior está en 300, la intermedia 80 y la superior 5, la masa del cuerpo será 385 g.

Conclusiones

- ¿Por qué las balanzas electrónicas son más precisas que las balanzas manuales?
- ¿Qué se debe hacer para reducir el error de una medida de escala?
- ¿Qué tipo de errores se pueden cometer al realizar una medida con una balanza?

CAPÍTULO 3.

MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS EN UNA DIMENSIÓN

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir el movimiento en línea recta en términos de velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media y aceleración instantánea.
- Cómo interpretar gráficas de posición contra tiempo y aceleración contra tiempo para el movimiento en línea recta.
- Cómo resolver problemas que impliquen movimiento en línea recta con aceleración constante, incluyendo problemas de caída libre.
- Cómo analizar el movimiento en línea recta cuando la aceleración es constante.

3.1. Desplazamiento, tiempo y velocidad media

Primero vamos a definir ¿Qué es el movimiento? Mientras estás sentado en tu pupitre, leyendo este libro, piensas que estas en reposo. Esto es verdad con respecto al piso del aula, pero piensas que estas en el planeta Tierra y que se mueve alrededor del sol a una velocidad promedio de 29,8 km/s y por consiguiente, tú también te mueves a esa velocidad, es decir no estás en reposo con respecto al sol. De aquí que la física define al **movimiento** como; *el cambio de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia en el transcurso del tiempo. Esta definición contiene los siguientes elementos.* (French, A. 1998).

Punto de referencia. ese el lugar con respecto al cual se observa si el cuerpo se aleja o se acerca. Por ejemplo: cuando sales de tu casa para ir a la universidad, el punto de referencia es tu casa.

Distancia y desplazamiento: la *distancia* (d) es la medida del camino recorrido, es una **magnitud escalar**. Si una persona dice, “Caminé 5 km” se comprende perfectamente. Pero si esta misma persona dice, “Salí de mi casa y camine 5 km hacia el norte”, ya no se trata de una distancia, sino de un *desplazamiento* ($\vec{\Delta r}$) que ha hecho, y es una **magnitud vectorial** porque tiene modulo y dirección.

Rapidez y velocidad: si un automovilista dice “voy a 50 km/h”, es la *rapidez* (v) con la que se está desplazando y se trata de una **magnitud escalar**. Pero si dice “voy a 50 km/h hacia la universidad”, ya no es una rapidez, sino de una *velocidad* ($\vec{v}$) es una **magnitud vectorial** porque tiene modulo (50 km/h) y dirección (hacia la universidad).

Rapidez instantánea: es cuando se mide en un instante dado, como cuando indica el velocímetro de un automóvil. También puede ser **rapidez promedio**, cuando se divide la distancia recorrida para el tiempo (t) empleado en recorrerla, y es:

$$\text{Rapidez promedio (v)} = \frac{\text{distancia (d)}}{\text{tiempo (t)}}$$

Ejemplo 1.

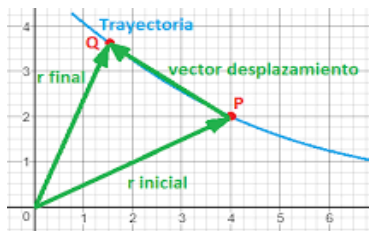
Si para recorrer de quito a cuenca, en un bus se ha tardado 10 horas, la rapidez promedio será de $442 \text{ km}/10 \text{ h} = 44,2 \text{ km/h}$.

En resumen, la distancia y la rapidez son *magnitudes escalares*. El desplazamiento y la velocidad son *magnitudes vectoriales*.

Desplazamiento (Δx)

Es la variación que experimenta el vector posición de una partícula.

En un cierto intervalo de tiempo (Δt).



De aquí tenemos:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

El desplazamiento de un móvil es un segmento dirigido que une dos posiciones diferentes de su trayectoria.

Unidades: el desplazamiento es una *magnitud vectorial*, cuyas unidades son de una longitud:

En el SI:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{r}_1$$

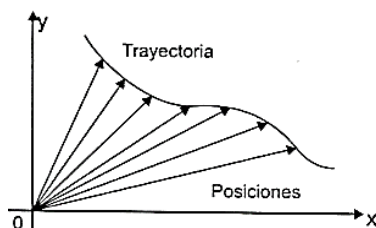
$$\text{m} = \text{m} - \text{m}$$

En el CGS:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$\text{cm} = \text{cm} - \text{cm}$$

Trayectoria: es la línea que resulta de unir las diferentes posiciones que ocupó la partícula al moverse de un lugar a otro.



Partícula: un cuerpo es considerado como una partícula si sus dimensiones son despreciables en relación con las magnitudes de las distancias analizadas. Por ejemplo, una pelota de futbol en relación con la cancha, un avión en relación con un vuelo entre dos ciudades

Velocidad media (v_{med-x})

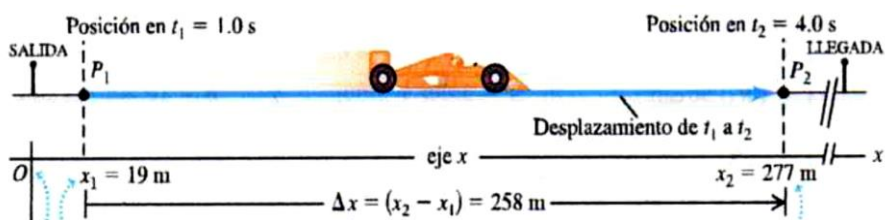
La velocidad media en una dirección es el cociente entre el desplazamiento y el tiempo empleado. La velocidad media depende del **intervalo de tiempo** y es una cantidad vectorial.

En el sistema internacional (SI) se expresa en m/s y en sistema (CGS) en cm/s. (Goldemberg, J. 2010).

$$\text{Velocidad media } (v_{med-x}) = \frac{\text{desplazamiento } (\Delta r)}{\text{tiempo } (\Delta t)} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \text{ si } \Delta t > 0$$

Ejemplo 2.

Hallar la velocidad media de la figura.



Datos

$$x_1 = 19 \text{ m}$$

$$x_2 = 277 \text{ m}$$

$$t = 1 \text{ s}$$

$$t = 4 \text{ s}$$

$$v_{m-x} = ?$$

Solución

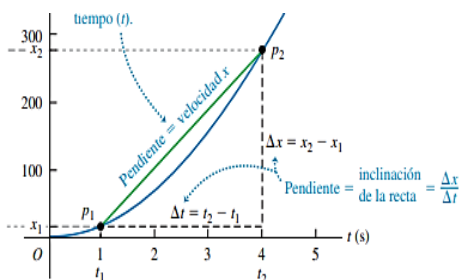
$$v_{\text{med-x}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_{\text{med-x}} = \frac{277 \text{ m} - 19 \text{ m}}{4 \text{ s} - 3 \text{ s}} = \mathbf{86 \text{ m/s}}$$

La velocidad media es positiva. Esto significa que, durante el intervalo, la coordenada x aumentó y el auto se movió en la dirección $+x$ a la derecha de la figura. Si una partícula se mueve en la dirección x

negativa durante un intervalo de tiempo, su velocidad media en ese lapso es negativa.

La velocidad media depende sólo del desplazamiento total $\Delta r = x_2 - x_1$ que se da durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$



3.2. Velocidad instantánea

Hay ocasiones en que la velocidad media es lo único que necesitamos saber acerca del movimiento de una partícula. Por ejemplo, una carrera en pista recta es en realidad una competencia para determinar quien tuvo la mayor velocidad media. Para describir el movimiento con mayor detalle, necesitamos definir la velocidad en cualquier instante específico del camino. Esta es la **velocidad instantánea**.

En el lenguaje del cálculo, el límite de $\Delta x/\Delta t$ cuando incremento Δt se acerca a cero es la **derivada** de x con t y se escribe dx/dt . *La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media uniforme en el intervalo de tiempo se acerca a cero; es igual a la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo.* Usamos el símbolo v_x sin “med” en el subíndice, para la velocidad instantánea en el eje x (Young, H. et al. 2009).

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \text{ (velocidad instantánea, movimiento rectilíneo)}$$

Los términos “velocidad” y “rapidez” se usan indistintamente en el lenguaje cotidiano; no obstante, en física tienen diferente significado. **Rapidez** denota distancia recorrida dividida entre tiempo, con un régimen medio o instantáneo, usaremos el símbolo (u), sin subíndice para denotar la rapidez instantánea. **La velocidad instantánea** mide con qué rapidez y en qué dirección se mueve. Por ejemplo, una partícula con velocidad instantánea $u_x = 25 \text{ m/s}$ y otra -25 m/s se mueve en direcciones opuestas con la misma rapidez instantánea de 26 m/s . La rapidez instantánea, no puede ser negativa.

Ejemplo 3.

Un leopardo asecha 20 metros al este del escondite de un observador. En el $t = 0$, el leopardo ataca a una cebra y empieza a correr en línea recta. Durante los primeros 2 segundos del ataque, la coordenada x del leopardo varía con el tiempo según la ecuación $x = 20 \text{ m} + (5 \text{ m/s}^2) t^2$. Determine:

- El desplazamiento del leopardo.
- La velocidad media en dicho intervalo
- La velocidad media en este intervalo $t_1 = 1 \text{ s}$ tomando $\Delta t = 0,1 \text{ s}$
- La velocidad instantánea en función del tiempo

Datos

Utilizamos la ecuación para determinar los puntos
 $x = 20 \text{ m} + (5 \text{ m/s}^2) t^2$

Solución

- El desplazamiento en este intervalo es

En $t_1 = 1 \text{ s}$, **la posición x_1** , del leopardo es

$$x_1 = 20 \text{ m} + (5 \text{ m/s}^2) (1 \text{ s})^2 = \mathbf{25 \text{ m}}$$

En $t_2 = 2 \text{ s}$, **la posición x_2** , del leopardo es

$$x_2 = 20 \text{ m} + (5 \text{ m/s}^2) (2 \text{ s})^2 = \mathbf{40 \text{ m}}$$

$$\Delta r = x_2 - x_1 = 40 \text{ m} - 25 \text{ m} = \mathbf{15 \text{ m}}$$

- La velocidad media durante este intervalo

$$u_{\text{med-x}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40 \text{ m} - 25 \text{ m}}{2 \text{ s} - 1 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \mathbf{15 \text{ m/s}}$$

- La velocidad instantánea $\Delta t = 0,1 \text{ s}$, es decir $t_1 = 1 \text{ s}$ a $t_2 = 1,1 \text{ s}$

$$x_2 = 20 \text{ m} + (5 \text{ m/s}^2)(1,1 \text{ s})^2 = \mathbf{26,05 \text{ m}}$$

$$v_{\text{med-x}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{26,05 \text{ m} - 25 \text{ m}}{1,1 \text{ s} - 1 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \mathbf{10,5 \text{ m/s}}$$

d) Derivando la expresión de x con respecto a t , la derivada de una constante que es 20 m es cero, y la derivada de t^2 es $2t$. Por lo tanto, tenemos:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5 \text{ m/s}^2) (2t) = \mathbf{(10 \text{ m/s}^2) t}$$

Los resultados muestran que el leopardo aumentó su rapidez en: $t = 0$ (cuando estaba en reposo) a $t = 1 \text{ s}$ ($v_x = 10 \text{ m/s}$) a $t = 2 \text{ s}$ ($v_x = 20 \text{ m/s}$).

3.3. Movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento rectilíneo uniforme (**MRU**), es cuando una *partícula* viaja a *velocidad constante* y se mueve con una *rapidez constante* a lo largo de una línea recta, ya que la **rapidez** (**v**) es la distancia recorrida (**d**) por una partícula en cierto tiempo (**t**). Es una cantidad escalar, porque se define con una magnitud y una unidad media. Su fórmula es:

$$v = \frac{d}{t}$$

Ejemplo 4.

Un vehículo viaja, en una sola dirección, con una rapidez media de 40 km/h durante los primeros 15 minutos de su recorrido y 30 km durante los siguientes 20 minutos.

Calcular:

- La distancia total recorrida.
- la rapidez media del recorrido.

Datos

$$v_1 = 40 \text{ km/h}$$

$$t_1 = 15 \text{ min.} = 0,25 \text{ h}$$

$$v_2 = 30 \text{ km/h}$$

$$t_2 = 20 \text{ min.} = 0,333 \text{ h}$$

$$d_T = ?$$

$$v_{\text{med-x}} = ?$$

Solución

$$a) d_T = d_1 + d_2$$

$$d_T = v_1 t_1 + v_2 t_2$$

$$d_T = (40 \text{ km/h}) (0,25 \text{ h}) + (30 \text{ km/h}) (0,333 \text{ h})$$

$$d_T = 10 \text{ km} + 10 \text{ km}$$

$$d_T = 20 \text{ km}$$

$$b) v_T = \frac{d_T}{t_T}$$

$$v_T = \frac{20 \text{ km}}{0,583 \text{ h}}$$

$$v_{\text{med-x}} = 34,3 \text{ km/h}$$

Ejemplo 5.

Dos puntos A y B están separados 10 km. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 4 km/h. Simultáneamente y desde B, Parte hacia A otro móvil con una rapidez constante de 3 km/h. Determinar analítica y gráficamente dónde y cuándo se encuentran.

Solución analítica

$$d = d_a + d_b$$

$$d = v_a \cdot t + v_b \cdot t$$

$$d = t(v_a + v_b)$$

$$10 \text{ km} = t(4 + 3) \text{ km/h}$$

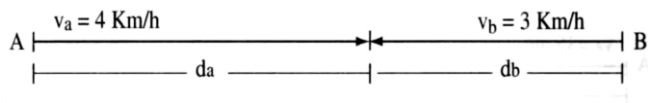
$$10 \text{ km/h} = t \cdot 7 \text{ km/h}$$

$$t = 1,43 \text{ h (cuándo)}$$

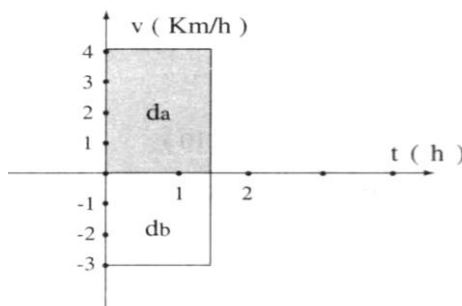
$$d_a = v_a \cdot t$$

$$d_a = 4 \text{ km/h} \cdot 1,43 \text{ h}$$

$$d_a = 5,72 \text{ km (dónde)}$$



Solución gráfica



3.4. Aceleración

Los objetos en movimiento pueden aumentar su velocidad o disminuir. En realidad, en la mayoría de movimiento la velocidad no permanece constante. Por ejemplo:

La aceleración describe la tasa de cambio de velocidad con el tiempo, la aceleración es una cantidad vectorial. Como veremos, en el movimiento rectilíneo la aceleración puede referirse tanto a aumentar la rapidez como disminuirla.

Aceleración media e instantánea

La aceleración media de la partícula al moverse de P_1 a P_2 como una cantidad vectorial cuya componente x es $a_{\text{med-x}}$ igual a Δv , el cambio en la componente x de la velocidad, dividido entre el intervalo de tiempo Δt . (Young, H. et al. 2009).

$$a_{\text{med-x}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \text{ aceleración media, movimiento rectilíneo}$$

Si expresamos la velocidad en metros por segundo y el tiempo en segundos. La aceleración media en el sistema SI se mide en m/s^2 .

Ejemplo 6.

Una astronauta sale de una nave espacial en órbita para probar una unidad personal de maniobras. Mientras se mueve en línea recta, su compañera a bordo mide su velocidad cada 2 segundos a partir del instante $t = 1$ s.

t	v_x
1 s	0,8 m/s
3 s	1,2 m/s
5 s	1,6 m/s
7 s	1,2 m/s
9 s	-0,4 m/s
11 s	-1,0 m/s

Calcule la aceleración media y diga si la rapidez del astronauta aumenta o disminuye para cada uno de estos intervalos:

a) $t_1 = 1$ s a $t_2 = 3$ s

b) $t_1 = 5$ s a $t_2 = 7$ s

c) $t_1 = 9$ s a $t_2 = 11$ s

Datos

$a_{\text{med-x}} = ?$ a partir del cambio de velocidad y el intervalo de tiempo

Solución

$$\text{a) } a_{\text{med-x}} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{1,2 \text{ m/s} - 0,8 \text{ m/s}}{3 \text{ s} - 1 \text{ s}} = 0,2 \text{ m/s}^2$$

La rapidez aumenta de 0,8 m/s a 1,2 m/s

$$\text{b) } a_{\text{med-x}} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{1,2 \text{ m/s} - 1,6 \text{ m/s}}{7 \text{ s} - 5 \text{ s}} = -0,2 \text{ m/s}^2$$

La rapidez disminuye de 1,6 m/s a 1,2 m/s

$$\text{c) } a_{\text{med-x}} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{-1 \text{ m/s} - (-0,4 \text{ m/s})}{11 \text{ s} - 9 \text{ s}} = -0,3 \text{ m/s}^2$$

La rapidez aumenta de 0,4 m/s a 1 m/s

Aceleración instantánea

La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero. Como ejemplo

suponga que un piloto de carreras acaba de entrar en una recta, para definir la aceleración instantánea en P_1 , tomamos el segundo punto P_2 cada vez más cerca de P_1 , de modo que la aceleración media se calcule en intervalos cada vez más cortos. En el lenguaje del cálculo, *la aceleración instantánea es la tasa instantánea de cambio de velocidad con el tiempo*. (Young, H. et al. 2009).

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \text{ (velocidad instantánea, movimiento rectilíneo)}$$

Observe que la ecuación es realmente la definición de la componente x del vector de aceleración o la aceleración instantánea; en el movimiento rectilíneo, las demás componentes de este vector son cero. A partir de aquí, al hablar de aceleración instantánea, no a la aceleración media.

Ejemplo 7.

Suponga que la velocidad v_x del auto de la figura en el tiempo t está dada por:

$$v_x = 60 \text{ m/s} + (0,50 \text{ m/s}^3) t^2$$

- Calcule el cambio de velocidad del auto en el intervalo $t_1 = 1 \text{ s}$ y $t_2 = 3 \text{ s}$
- Calcule la aceleración media en este intervalo $t_1 = 1 \text{ s}$ a $t_2 = 3 \text{ s}$
- Deduzca una expresión para la aceleración instantánea y úsela para obtener la aceleración en $t = 1 \text{ s}$ y $t = 3 \text{ s}$



Datos

- $\Delta v_x = v_{t_2} - v_{t_1}$ en $t_1 = 1 \text{ s}$ y $t_2 = 3 \text{ s}$?
- $a_{\text{med-x}}$ en el intervalo anterior?
- $a_x = ?$ en $t = 1 \text{ s}$ y $t = 3 \text{ s}$

Solución

a) $v_{1x} = 60 \text{ m/s} + (0,50 \text{ m/s}^3) t^2$ en el instante $t_1 = 1 \text{ s}$

$$v_{1x} = 60 \text{ m/s} + (0,50 \text{ m/s}^3) (1 \text{ s})^2 = \mathbf{60,5 \text{ m/s}}$$

b) $v_{2x} = 60 \text{ m/s} + (0,50 \text{ m/s}^3) t^2$ en el instante $t_2 = 3 \text{ s}$

$$v_{2x} = 60 \text{ m/s} + (0,50 \text{ m/s}^3) (3 \text{ s})^2 = \mathbf{64,5 \text{ m/s}}$$

El cambio de velocidad Δv_x es

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64,5 \text{ m/s} - 60,5 \text{ m/s} = \mathbf{4,5 \text{ m/s}}$$

c) La aceleración instantánea es $a_x = \frac{dv}{dt}$. La derivada de una constante 60 m/s es cero y la derivada de t^2 es $2t$.

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [60 \text{ m/s} + (0,50 \text{ m/s}^3) t^2]$$

$$a_x = (0,50 \text{ m/s}^3) (2t) = \mathbf{(1 \text{ m/s}^3)t}$$

Cuando $t = 1 \text{ s}$

$$a_x = (1 \text{ m/s}^3) (1 \text{ s}) = \mathbf{1 \text{ m/s}^2}$$

Cuando $t = 3 \text{ s}$

$$a_x = (1 \text{ m/s}^3) (3 \text{ s}) = \mathbf{3 \text{ m/s}^2}$$

Ejercicio 6

1. Se produce un disparo a 2,04 km de donde se encuentra un policía. ¿Cuánto tarda el policía en oírlo si la velocidad del sonido en el aire es de 330 m/s?
2. ¿Cuál será la distancia recorrida por un móvil a razón de 90 km/h, después de un día y medio de viaje.
3. ¿Cuál es el tiempo empleado por un móvil que se desplaza a 75 km/h para recorrer una distancia de 25 000 m?
4. Un cuerpo inicia su movimiento para $t = 0$ en la posición $x = 5$ cm y finalmente alcanza la posición $x = 23$ cm. Si emplea 15 segundos en todo el recorrido. ¿Cuál es su velocidad media?
5. Un auto de fórmula 1 recorre la recta de un circuito con velocidad constante. En los tiempos $t_1 = 0,5$ s y $t_2 = 1,5$ s sus posiciones en la recta son $x_1 = 3,5$ m y $x_2 = 43,5$ m. ¿A qué velocidad se desplaza el auto?
6. Un cohete que lleva un satélite acelera verticalmente alejándose de la superficie terrestre. 1,15 s después del despegue, el cohete libera el tope de su plataforma de lanzamiento, a 63 m sobre el suelo; y después de otros 4,75 s, está a 1,0 km sobre el suelo. Calcule la magnitud de la velocidad media del cohete en la parte de 4,75 s de su vuelo.
7. Suponga que usted normalmente conduce por la autopista que va de San Diego a los Ángeles con una rapidez media de 105 km/h y el viaje le toma 2 h y 20 minutos, sin embargo, un viernes por la tarde el tráfico obliga a conducir la misma distancia con una rapidez media de sólo 70 km/h. ¿Cuánto tiempo más tardará el viaje?
8. Qué tiempo tardará un automóvil en viajar de Quito a Guayaquil, siendo la distancia entre ambas ciudades 420 km, si viaja con una velocidad constante de 80 km/h?
9. Dos puntos A y B están separados 12 km. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 5 km/h. Simultáneamente y desde B, Parte hacia A otro móvil con una rapidez constante de 3,5 km/h. Determinar analítica y gráficamente dónde y cuándo se encuentran.

10. Una motocicleta parte de la línea de salida y aumenta repentinamente su velocidad a 72 km/h en 20 segundos. Determinar su aceleración media.
11. Determinar la aceleración media de un automóvil que, inicialmente, se mueve a 36 km/h y que se detiene en 5 segundos.
12. Un automóvil se ubica a 2 km del origen de su sistema de referencia y comienza a moverse en línea recta con una velocidad media de 72 km/h. ¿Cuál será su posición luego de 1 hora?

3.5. Movimiento con aceleración constante

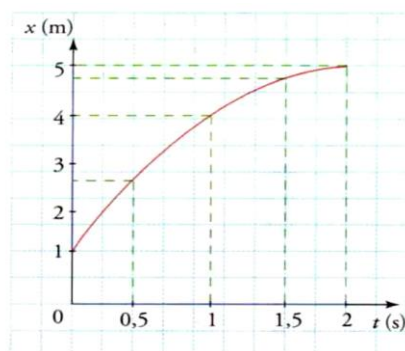
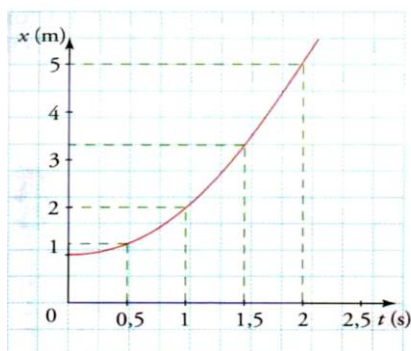
El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con *aceleración constante*. En este caso, la velocidad cambia al mismo ritmo todo el tiempo. Se trata de una situación muy especial, aun cuando ocurre a menudo en la naturaleza; un cuerpo que cae tiene *aceleración constante* si los efectos del aire no son importantes.

Lo mismo sucede con un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal. El movimiento rectilíneo con aceleración casi constante se da también en la tecnología, como cuando un jet de combate es lanzado con catapulta desde la cubierta de un portaviones (Tipler, A. 1998).

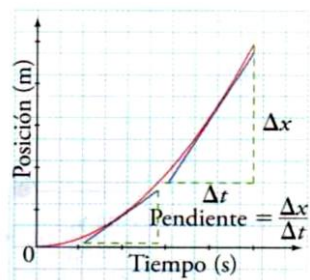
Gráficos desplazamiento-tiempo ($x-t$)

Como la relación entre el desplazamiento y el tiempo tiene un término cuyo factor es t^2 , entonces la gráfica ($x-t$) para el movimiento uniformemente variado es una parábola. Se muestran las gráficas $x-t$ para un movimiento uniformemente variado con aceleración positiva (izquierda) y con aceleración negativa a la (derecha).

Se observa que, si la **aceleración es positiva**, los *cambios de posición son cada vez mayores* en los mismos intervalos de tiempo; mientras que si la **aceleración es negativa**, los cambios de posición son *cada vez menores*.

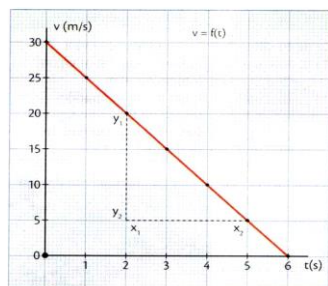
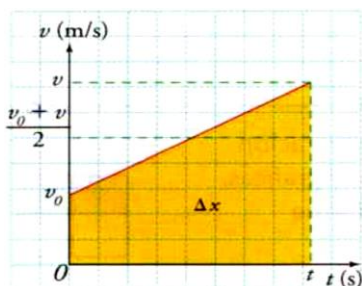


En el movimiento rectilíneo uniforme, la gráfica $x-t$ es una recta cuya pendiente representa la velocidad del objeto; cuando la velocidad no es constante, la representación $x-t$ no es una recta y entonces debemos establecer un método para determinar la pendiente de la curva en cada punto. Para ello trazamos la recta tangente a la curva en cada punto y la pendiente de esta recta representa la velocidad del objeto en cada instante del tiempo, como indica la figura. Se muestra la recta tangente a un punto de una gráfica posición-tiempo.



Gráficos velocidad-tiempo ($v-t$)

En un Movimiento Uniformemente Acelerado, la velocidad varía proporcionalmente al tiempo, por lo que la representación gráfica ($v-t$), velocidad en función del tiempo, es una recta ascendente, que se mueve con aceleración constante, la pendiente de la recta coincide con el valor de la aceleración. Analicemos el movimiento del gráfico de la velocidad contra el tiempo. *Debes tener en cuenta que el tiempo avanza a partir de que se **aplica la aceleración**, lo cual **se incrementa la velocidad en cada segundo**, hasta llegar a una velocidad final* (Tipler, A. 1998).



En un Movimiento Uniforme **Decelerado su pendiente disminuye de un modo uniforme**, lo que da lugar a una gráfica velocidad-tiempo ($v-t$), decreciente y rectilínea, por ejemplo: si un móvil viaja a 50 m/s va disminuyendo uniformemente su velocidad con una desaceleración de 5 m/s hasta pararse en el tiempo de 6 segundos. Esto significa que la velocidad va disminuyendo uniformemente en el transcurso del tiempo,

es decir, hay una relación inversa entre la velocidad y el tiempo. Para encontrar la pendiente se debe ser muy cuidadoso en localizar las coordenadas y y x. Del gráfico.

$$m = \frac{5 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}}{5 \text{ s} - 2 \text{ s}} = -5 \text{ m/s}^2$$

La aceleración es negativa de este movimiento

Gráfico aceleración-tiempo ($a-t$)

De la misma forma representar la aceleración en una gráfica ($a-t$), para lo cual escribimos en el eje vertical la aceleración y en el horizontal el tiempo. El movimiento uniformemente variado se produce con **aceleración constante**, la gráfica representa este movimiento y es un segmento de recta horizontal (Pérez, H. 2013).

A partir de la ecuación

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

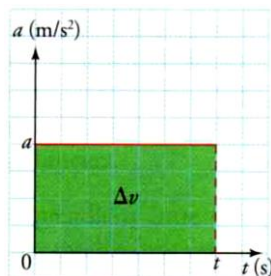
Tenemos que:

Como $v_x - v_{0x}$ corresponde a la variación de la velocidad (Δv_x), entonces:

Lo cual coincide con el área del rectángulo que se forma entre la recta.

$$\Delta v_x = a_x \cdot t$$

y el eje horizontal en la gráfica $a-t$ de la figura.



El área comprendida entre la gráfica $a-t$ y el eje horizontal representa el cambio de velocidad de un objeto.

También podemos obtener la velocidad media en cualquier intervalo es solo el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo sobre dos.

$$v_{\text{med-x}} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \text{ con aceleración constante}$$

Sustituimos la velocidad $v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$

De donde obtenemos la ecuación:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2 \text{ con aceleración constante}$$

Con frecuencia es útil tener una relación entre posición, velocidad y aceleración. El desplazamiento es una magnitud vectorial, y es una ecuación útil cuando se conoce la velocidad inicial, la aceleración y el tiempo, esta ecuación la podemos obtener despejando de.

$$\Delta x = v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2 \text{ con aceleración constante}$$

Otras fórmulas importantes son:

$$v_{fx}^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(\Delta x) \text{ con aceleración constante}$$

$$\Delta x = \left(\frac{v_{0x} + v_{fx}}{2} \right) t \text{ con aceleración constante}$$

Ejemplo 1.

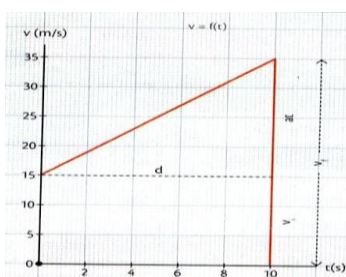
Si un automóvil que va 15 m/s se le da una aceleración constante de 2 m/s², después de 10 segundos tendrá una velocidad de 35 m/s. El movimiento de este automóvil se diferencia del movimiento estudiado anteriormente, en que tiene velocidad inicial (v_{0x}) 15 m/s, a partir de la cual, se va incrementando 2 m/s en cada segundo hasta llegar a una velocidad final (v_{fx}) 35 m/s. Grafica la velocidad contra el tiempo y analiza el movimiento.

Analicemos este movimiento sirviéndonos de un gráfico de la velocidad contra el tiempo. No debes olvidar que el tiempo corre a partir de que se aplica una aceleración.

Tiempo (s)	0	2	4	6	8	10
Velocidad (m/s)	15	19	23	27	31	35

En el gráfico, la línea no parte de 0, sino de 15 m/s, que es la velocidad inicial. A partir de aquí se obtiene una línea recta que indica que en este caso la relación la velocidad y el tiempo es una **relación lineal**, no es directamente proporcional. Por otra parte, la línea derecha del eje indica que la velocidad final (v) está formada de dos partes:

- 1) Corresponde a la *velocidad inicial* (v_0)
- 2) Corresponde al *producto de la aceleración por el tiempo*. Esto nos indica que en el movimiento la velocidad final está dada por la siguiente ecuación $v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$, se observa que se ha formado **un trapecio**, cuya base mayor es la velocidad final, la base menor la velocidad inicial y la altura es el tiempo (Hewitt, P. 2008).



Área del trapecio $d = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2} \right) t$ con aceleración constante.

Ejemplo 2.

Un motociclista que viaja al este y cruza una pequeña ciudad y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad como indica la figura. Su *aceleración constante* es de 4 m/s^2 . En $t = 0$, está a 5 metros al este del letrero, moviéndose al este a 15 m/s . Determine:

- a) Su posición y velocidad en $t = 2$ s
 b) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?

Datos

$$a_x = 4 \text{ m/s}^2$$

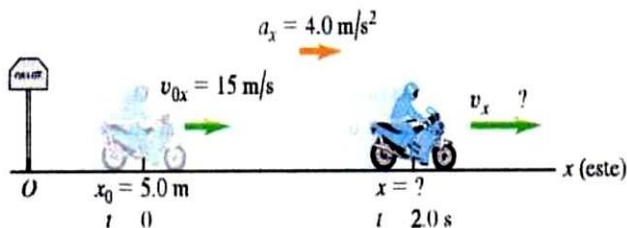
$$x_0 = 5 \text{ m}$$

$$v_{0x} = 15 \text{ m/s}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

$$x = ? \text{ 2 s}$$

$$v_{fx} = ? \text{ 2 s}$$



Solución

- a) Hallamos la posición y la velocidad en x en $t = 2$ segundos.

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x = 5 \text{ m} + (15 \text{ m/s})(2 \text{ s}) + \frac{1}{2} (4 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s})^2$$

$$\mathbf{x = 43 \text{ m}}$$

$$v_{fx} = v_{0x} + a_x t$$

$$v_{fx} = 15 \text{ m/s} + (4 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s})$$

$$\mathbf{v_{fx} = 23 \text{ m/s}}$$

- b) Encontramos x cuando su velocidad es de 25 m/s

$$v_{fx}^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Despejamos x y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$x = x_0 + \left(\frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \right)$$

$$x = 5 \text{ m} + \left(\frac{(25 \text{ m/s})^2 - (15 \text{ m/s})^2}{2(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})} \right)$$

$$\mathbf{x = 55 \text{ m}}$$

Ejemplo 3.

Un automóvil parte del reposo y en 10 segundos adquiere una velocidad de 80 km/h. Determinar:

- a) La aceleración en m/s^2 .
 b) La distancia que ha recorrido en dicho tiempo.

Datos

$$v_{0x} = 0$$

$$v_x = 80 \text{ km/h} = 22,2 \text{ m/s}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

Solución

a) Utilizamos la ecuación de la velocidad final.

$$v_{fx} = v_{0x} + a_x \cdot t$$

Despejamos la ecuación para obtener la aceleración.

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{22,2 \text{ m/s}}{10 \text{ s}}$$

$$a_x = 2,2 \text{ m/s}^2$$

b) Para hallar la distancia utilizamos la formula.

$$\Delta x = v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Como $v_{0x} = 0$, nos queda:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} (2,2 \text{ m/s}^2) (10 \text{ s})^2$$

$$\Delta x = 110 \text{ m}$$

Ejemplo 4.

Un cuerpo que ha partido del reposo con movimiento rectilíneo ha variado su velocidad de acuerdo con la tabla:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6
Velocidad (m/s)	0	4	8	12	16	20	24

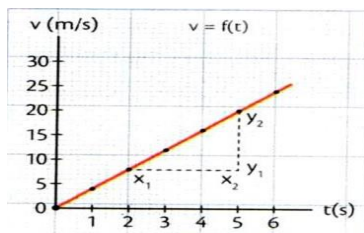
a) Graficar velocidad-tiempo.

b) Encontrar la pendiente y su significado.

c) Hacer la tabla distancia-tiempo, graficarla e interpretarla.

Solución

a) Graficar velocidad-tiempo.



b) Del gráfico se obtiene la pendiente (m).

$$m = \frac{20 \text{ m/s} - 8 \text{ m/s}}{5 \text{ s} - 2 \text{ s}} = 4 \text{ m/s}^2$$

4 m/s² es la aceleración

c) Las distancias para cada tiempo son:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x t^2$$

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m)	0	2	8	18	32	50	72

Significa que la distancia es proporcional al tiempo al cuadrado.

Ejemplo 5.

Un automóvil, que se ha detenido en un semáforo como se muestra en la gráfica, se pone en movimiento y aumenta uniformemente su rapidez hasta 20 m/s al cabo de 10 s. A partir de ese instante, la rapidez se mantiene constante durante 15 s, después de los cuales el conductor observa otro semáforo que se pone en rojo, por lo que disminuye uniformemente la velocidad hasta detenerse a los 5 s de haber comenzado a frenar. Determinar la aceleración del automóvil y el desplazamiento entre los dos semáforos, en cada intervalo de tiempo.

Solución



Intervalo 1: se calcula aceleración y el desplazamiento:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{20 \text{ m/s} - 0}{10 \text{ s}}$$

$$a_x = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta_x = \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$\Delta_x = \frac{1}{2} (2 \text{ m/s}^2) (10 \text{ s})^2 = 100 \text{ m}$$

Intervalo 2: la rapidez permanece constante, el desplazamiento para el movimiento uniforme:

$$\Delta_x = v_x \cdot t$$

$$\Delta_x = (20 \text{ m/s}) (15 \text{ s}) = 300 \text{ m}$$

Intervalo 3: se calcula la aceleración y el desplazamiento hasta detenerse a los 5 s:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{0 - 20 \text{ m/s}}{5 \text{ s}}$$

$$a_x = -4 \text{ m/s}^2$$

La aceleración es -4 m/s^2 , lo cual indica que la velocidad y la aceleración tienen signos contrarios y se interpreta como una disminución de la velocidad.

$$\Delta_x = v_x \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$\Delta_x = (20 \text{ m/s}) (15 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-4 \text{ m/s}^2) (5 \text{ s})^2 = 50 \text{ m}$$

$$\text{El desplazamiento total es: } 100 \text{ m} + 300 \text{ m} + 50 \text{ m} = 450 \text{ m}$$

3.6. Cuerpos con caída libre

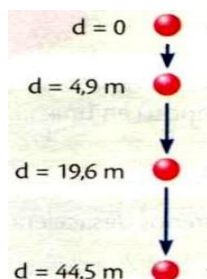
Más conocido de movimiento con aceleración casi constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Dicho movimiento ha interesado a filósofos y científicos desde la antigüedad. En el siglo IV a. C., Aristóteles pensaba (*erróneamente*) que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso. Esta creencia se mantuvo hasta el siglo XVII, cuando **Galileo afirmó** que los cuerpos caían con una aceleración e independiente de su peso. Pero queda una duda, ¿qué sucede si dejas caer de una misma altura una moneda y una pluma? Has la prueba y comprobarás que cae primero la moneda y luego la pluma. ¿Por qué?

La respuesta es semejante a la del ciclista que es “golpeado” por las moléculas del aire. En este caso, el aire ofrece poca resistencia a la moneda, porque su área de choque es pequeña, mientras que la pluma tiene una mayor área le hace caer más lentamente.



Pero Newton quiso comprobar la realidad de la explicación y para eso construyó un tubo de vidrio semejante al gráfico. Extrajo el aire del tubo, en el cual estaba la moneda y la pluma, Al darle vuelta, vio con asombro que los dos caían al mismo tiempo (French, A. 1998).

Lo cual comprobó que el enunciado de Galileo era cierto, únicamente cuando los cuerpos caen al **vacío**, pero también se cumple en el aire, con la condición de que los dos cuerpos de distinto peso, tengan también la misma forma. Por ejemplo, si se hace caer una bola de acero junto a una bola de madera del mismo tamaño, ambas caen al mismo tiempo. La pregunta que surge ahora es: ¿Por qué caen los cuerpos al soltarlos en el aire? La solución la dio Newton al explicar que la **Tierra ejerce una fuerza de atracción, llamada fuerza gravitacional**, sobre los cuerpos dejados caer libremente.



Esta fuerza produce una aceleración constante (**g**) de $9,8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2$, y se llama aceleración de la gravedad. Este valor es promedio,

el valor en cada lugar geográfico depende de su distancia al centro de la tierra.

Esto implica, que el Movimiento Uniforme Acelerado sin velocidad inicial. Por consiguiente, las ecuaciones de movimiento que se estudiaron anteriormente se aplican perfectamente para la caída libre, con pequeños cambios en las letras. Se emplea (**g**) para la aceleración y (**h**) para la distancia que en este caso es la altura de la cae el cuerpo. En las ecuaciones que vienen a continuación y en los ejercicios de aplicación, no tomamos en cuenta la resistencia del aire, porque se trata con alturas relativamente pequeñas, donde la resistencia es despreciable y no afecta mayormente al movimiento de los cuerpos.

Las ecuaciones son las mismas que en el (**MRUA**), pero se ha cambiado el desplazamiento horizontal (**Δx**) por la altura (**h**) y aceleración (**a**) por aceleración de la gravedad (**g**). Tomaremos el origen o como punto de partida hacia abajo (g), en la dirección y negativa, así que (**$ay = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$**) y hacia arriba del origen como positiva. Recuerde que por definición (g) siempre es positiva.

$h = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t$	$v_f = v_0 + gt$
--	------------------

$h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$	$v_f^2 = v_0^2 + 2gh$
--------------------------------	-----------------------

$t = \frac{v_f - v_0}{g}$

Ejemplo 6.

Desde la terraza de un edificio se deja caer una bola de tenis que tarda en llegar al suelo 3,5 s. Determinar la altura del edificio y la velocidad que tiene la bola de tenis al llegar al suelo.

Datos

$$v_o = 0$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$t = 3,5 \text{ s}$$

$$h = ?$$

$$v_f = ?$$

Solución

$$\text{a) } h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} (-9,8 \text{ m/s}^2) (3,5 \text{ s})^2 = -60 \text{ m}$$

$$\mathbf{h = 60 \text{ m debajo del origen}}$$

$$\text{b) } v_f = g t = (-9,8 \text{ m/s}^2) (3,5 \text{ s}) = \mathbf{-34,3 \text{ m/s}}$$

3.7. Movimiento ascendente y descendente en caída libre

Cuando un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba, su velocidad comienza a disminuir debido a la aceleración de la gravedad en sentido contrario. Esto hace que en cada segundo la velocidad disminuya 9,8 m/s, hasta que llegue un momento en que la velocidad se hace cero, llegando el cuerpo a su altura máxima; entonces comienza a bajar en caída vertical. (French, A. 1998).

Como puedes ver, en realidad hay dos movimientos: uno de subida, que es uniforme retardado; y el movimiento de bajada que es uniformemente acelerado, con la característica de que el tiempo empleado para subir para subir es igual al tiempo empleado para bajar. Para resolver problemas, debes emplear las mismas formulas estudiadas anteriormente, pero tomando en cuenta si el cuerpo sube o baja. En la subida se emplean las ecuaciones del movimiento uniformemente retardado, con iguales cambios en las letras.

Utilizando estas ecuaciones, se puede obtener fácilmente una ecuación para la altura máxima que alcanza un objeto lanzado hacia arriba y el tiempo de subida:

$$v_f^2 = v_o^2 - 2gh$$

Como la v_f se hace cero y despejando nos queda la $h_{\max}$:

$$h_{\max.} = \frac{v_o^2}{2g}$$

$$v_f = v_o - gt$$

Como la v_f se hace cero y despejando nos queda **tiempo de subida**:

$$t_s = \frac{v_o}{g}$$

Ejemplo 7.

Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. Tomar la gravedad 10 m/s². Determinar:

- ¿En qué tiempo su velocidad será de 10 m/s?
- ¿Cuál será la altura máxima alcanzada
- ¿Cuánto tiempo tardará en volver a su punto de partida?

Datos

$$v_o = 30 \text{ m/s}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$t = ?$$

$$h_{\max.} = ?$$

$$\text{Tiempo total} = ?$$

Solución

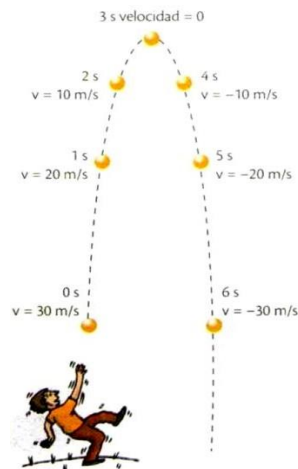
$$a) t = \frac{v_o - v_f}{g} = \frac{30 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = \frac{20 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

$$b) h_{\max} = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{(30 \text{ m/s})^2}{2(10 \text{ m/s}^2)} = 45 \text{ m}$$

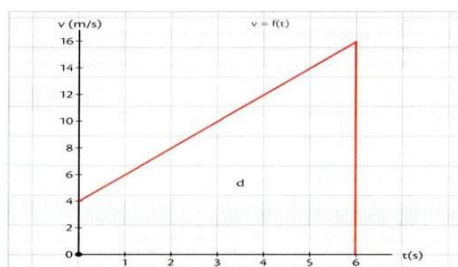
$$c) t = \frac{v_o}{g} = \frac{30 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = 3 \text{ s}$$

Tempo de subida, y su retorno multiplicado por 2: 3 s (2) = 6 s



Ejercicio 7

1. Un automóvil tarda 7 segundos en alcanzar una velocidad de 72 km/h desde el reposo y en línea recta. ¿Cuál es la distancia recorrida por el automóvil a los 7 segundos?
2. Un camión parte del reposo y acelera a razón de 5 m/s^2 durante 10 segundos. ¿Qué distancia recorre?
3. Un coche de carrera parte del reposo con una aceleración de 4 m/s^2 . Determinar la velocidad final al cabo de 30 segundos y la distancia que ha recorrido en ese tiempo.
4. Un auto de carrera sale de una parada de boxes en una pista recta, con una velocidad de 60 km/h. A partir de ese punto acelera a 3 m/s^2 . Encontrar:
 - a) La distancia que ha recorrido en 20 segundos.
 - b) La velocidad final al cabo de ese tiempo.
5. El gráfico adjunto representa el movimiento de un cuerpo. Determinar:



- a) ¿Qué tipo de movimiento ha tenido el cuerpo?
 - b) ¿Cuál es el valor de la velocidad inicial?
 - c) ¿Cuál es el valor de la velocidad final?
 - d) ¿Cuál es el valor de la aceleración?
6. ¿Qué velocidad inicial debe tener un niño en un monopatín para alcanzar una velocidad de 15 km/h en 5 segundos, si acelera a razón de $0,8 \text{ m/s}^2$?
 7. Un ciclista en una competencia corre con velocidad de 12 m/s, cuando llega a la parte final de la etapa de la carrera y observa la meta

a una distancia de 800 m; acelera a razón $0,4\text{m/s}^2$, y cruza la meta en primer lugar. ¿A qué velocidad cruzo la meta?

8. Un móvil arranca y después de 2 minutos de moverse por una trayectoria recta, adquiere una velocidad de 85 km/h. Determinar:

a) La aceleración producida

b) La distancia recorrida

9. ¿Con qué velocidad llega al piso un objeto que se suelta desde lo alto de un edificio y que tarda 10 segundos en caer?

10. Desde una altura de 100 metros se deja caer libremente un cuerpo. Encontrar la velocidad con que llega al suelo y el tiempo que tarda en recorrer esta distancia.

11. Desde un helicóptero en reposo se deja caer un cuerpo durante 10 segundos. Determinar:

a) ¿Qué velocidad tendrá al final de los 10 segundos?

b) La distancia recorrida.

12. Una flecha es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 32 m/s. Calcular:

a) La altura máxima que alcanzo la flecha.

b) El tiempo que tardó en regresar al punto de partida.

13. Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su velocidad y su posición a los 3 segundos.

14. Un niño deja caer una piedra a un pozo de 20 metros de profundidad. Calcula con que velocidad llegará al fondo si tarda 8 segundos en llegar.

15. Un niño lanza hacia abajo una piedra con una velocidad de 2 m/s desde lo alto de un árbol de 7 m de altura. Calcula con qué velocidad y tiempo llegará al piso.

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 4

ESTUDIO DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Objetivos

Aprender a identificar las variables que intervienen en un experimento físico.

Estudiar el movimiento de un cuerpo que rueda a lo largo de una regla acanalada.

Deducir el concepto de aceleración.

Fundamento teórico

El Movimiento Uniformemente Acelerado se caracteriza porque la velocidad va incrementándose con un valor constante en cada unidad de tiempo. Este incremento se conoce con el nombre de aceleración (a). Al cabo de un periodo de tiempo, la velocidad que tiene el cuerpo se conoce como velocidad final (v) y su valor se puede deducir de la siguiente ecuación.

$$h = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t \quad (1)$$

Quando se conoce la distancia (d), la velocidad (v_0) y el tiempo empleado en recorrer esa distancia (t). En el presente experimento la (v_0) es cero porque se parte del reposo. El desplazamiento y el tiempo se obtendrán de la realización del experimento (Goldemberg, J. 2010). Una vez determinada la velocidad final, se puede calcular el valor de la aceleración, mediante la siguiente ecuación:



$$v_f = v_o + a \cdot t \quad (2)$$

Materiales

- Plano inclinado de madera de 1 m de longitud y graduado en decímetro.
- Una bola de acero.
- Cronómetro.
- Soporte para el plano.
- Dos tacos de madera, uno de 5 cm de alto y otro de 10 cm.

Procedimiento

1. Coloca el extremo del plano sobre el taco de 5 cm y marca 50 cm en el plano inclinado de madera, mide el tiempo con el cronómetro que tarda la bolita en llegar hasta los 50 cm y 100. Anota los resultados en la tabla I.

Tabla I

	d = 50 cm	d = 100 cm
t (s)		
v _f (cm/s)		
a (cm/s ²)		

2. Repite el procedimiento sobre el taco de 10 cm y anota los resultados.

Tabla II

	d = 50 cm	d = 100 cm
t (s)		
v _f (cm/s)		
a (cm/s ²)		

Cálculos

Encuentra la velocidad final para cada distancia, empleando la ecuación (1).

Calcula la aceleración con la ecuación (2) para cada distancia.

Los cálculos deben repetirse para la segunda inclinación con el taco de 10 cm.

Conclusiones

¿Qué sucedería con la velocidad si el taco tuviera 25 cm de alto?

¿Y con el tiempo?

¿Qué factores afectaron el desarrollo de la práctica? ¿Cumpliste con los tres objetivos formulados para esta práctica? Si o no ¿Por qué?

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 5

CAÍDA DE LOS CUERPOS

Objetivo

Observar y cuantificar el valor de la variable tiempo para cuerpos que caen por el plano inclinado.

Fundamento teórico

Galileo Galilei utilizó el plano inclinado para poder analizar la caída de los cuerpos midiendo el tiempo que tardan en caer una distancia determinada sobre el plano inclinado y de esta manera encontrar las características de este movimiento. Con este método, la medición del tiempo en distancias más cortas, es más fácil realizarla, que si se deja caer el cuerpo libremente. También permite comparar con cuerpos de distintos tamaños (Goldemberg, J. 2010).

Materiales

Un riel metálico de un metro.

Una canica chica y una grande.

Una regla graduada.

Un marcador

Un cronometro

Dos ladrillos.

Plano inclinado para estudiar
la caída de los cuerpos.



Procedimiento

1. En lugares visibles del riel metálico, marca distancias cada 20 cm. Coloca un extremo del riel metálico sobre uno de los ladrillos, como se ve en la figura adjunta.

3. Suelta la canica pequeña desde el extremo superior del riel y mide el tiempo que tarda en recorrer cada distancia de 20 cm. Registre en el cuadro los datos: el tiempo transcurrido para que la canica recorra cada una de las distancias marcadas, es decir, 20 cm, 40 cm, 60 cm, 80 cm y 100 cm. Después eleve al cuadrado cada uno de los datos experimentales del tiempo transcurrido y anota en la tabla los resultados.

4. Repite el paso anterior, pero ahora suelta la canica más grande desde el extremo superior del riel y registra nuevamente el tiempo transcurrido para que la canica recorra cada una de las distancias marcadas. Compara estos tiempos para la canica pequeña. Elabora en tu cuaderno los cuadros de los datos experimentales.

Distancias y tiempos (experimentales)

Distancia (cm)	Tiempo (s)	Tiempo al cuadrado (t^2)
40		
60		
80		
100		

5. Con los valores obtenidos para la distancia recorrida por la canica y el tiempo transcurrido para recorrerla, elevado al cuadrado.

6. Repite los pasos 3, 4 y 5 pero ahora coloca un ladrillo más para que aumente la inclinación del plano.

Conclusiones

¿Fue diferente el tiempo de caída de la canica pequeña para cada una de las distancias marcadas, compara el tiempo de caída para que la canica grande recorra dichas distancias? Si o no ¿por qué?

¿Cómo varía el tiempo de caída de las canicas al ser mayor la inclinación del plano inclinado?

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 6

ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Objetivo

Construir un acelerómetro para medir la aceleración instantánea de los objetos en movimiento.

Fundamento teórico

La aceleración instantánea, refleja la aceleración que tiene un objeto en un momento determinado y en un punto específico de su trayectoria.

Materiales

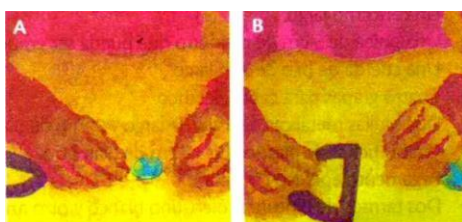
Una cuerda de 10 a 12 cm de longitud.

Un botón pesado.

Un transportador o graduador.

Procedimiento

1. Coloca los materiales tal como se muestran en las ilustraciones A y B.
2. Sostén en posición invertida el transportador. Cuando realices una lectura, sostenlo nivelado. Con el peso colgando libremente, la cuerda debe coincidir con la marca de 90° del aparato.
3. Sostén el acelerómetro frente a ti con los números a la vista. Mueve



rápidamente el acelerómetro hacia a un lado. Observa el ángulo de la cuerda medido por el transportador. ¿En qué dirección se mueve la cuerda? ¿Qué puedes inferir sobre la dirección de la aceleración? Ensayá moviendo el acelerómetro hacia otro lado, ¿Qué indica esto?

4. Usa la tabla adjunta para convertir la lectura del ángulo que tomaste en el acelerómetro en una aceleración en metros por segundo por segundo. (Goldemberg, J. 2010)

Tabla de conversión

Objeto en movimiento	Aceleración m/s/s
90°	0
80°	1,7
70°	3,6
60°	5,7
50°	8,2
45°	9,8
40°	12
30°	17
20°	27
10°	56

5. Mantén el nivel del acelerómetro y comienza a contar. Pide a un compañero que te colabore y lee el ángulo.

6. Consigna los datos observados en la tabla.

Conclusiones

¿En qué dirección se mueve la cuerda con respecto a la dirección en que te mueves cuando aceleras?

¿Cómo se comportó la cuerda a medida que disminuía la velocidad?

¿Cómo se comportó la cuerda a medida que disminuías la velocidad constante?

CAPÍTULO 4.

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES

METAS DE APRENDIZAJE

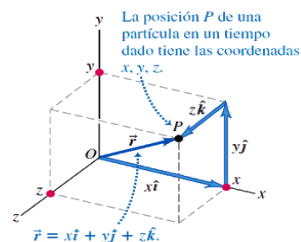
Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.
- Cómo interpretar las componentes de la aceleración de un cuerpo paralela y perpendicular a su trayectoria.
- Cómo describir la trayectoria curva que sigue un proyectil.
- Las ideas claves detrás del movimiento en una trayectoria circular, con rapidez constante o con rapidez variable.

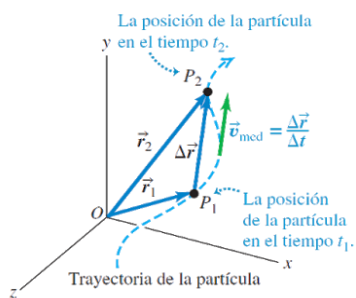
4.1. Vector posición y velocidad

Para describir *el movimiento* de una partícula en el espacio, primero tenemos que describir su posición. Considere una partícula que está en el punto P en cierto instante. Vector de posición $\vec{r}$ de la partícula en ese instante es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto P como se muestra en la figura. Las coordenadas cartesianas x, y y z de P son las componentes x, y y z de $\vec{r}$. Usando los vectores unitarios, podemos escribir.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ (vector posición)}$$



Durante un intervalo de tiempo Δt , la partícula se mueve de P_1 , donde su vector de posición es $\vec{r}_1$, a P_2 , donde su vector de posición es $\vec{r}_2$. El cambio de posición (el desplazamiento) durante este intervalo de tiempo es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Definimos la velocidad media durante este intervalo igual que en el capítulo anterior para el movimiento rectilíneo, como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo (Young, H. et al. 2009).



$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \text{ (vector de velocidad media)}$$

La velocidad instantánea igual que en el capítulo 3: como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero, y es la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo. La diferencia clave es que tanto la posición $\vec{r}$ como la velocidad instantánea $\vec{v}$ ahora son vectores:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{vector de velocidad instantánea})$$

La dirección de $\vec{v}$ en cualquier instante es la dirección en que la partícula se mueve en ese instante. **En cualquier punto de la trayectoria, el vector de velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en ese punto.**

A menudo es más sencillo calcular el vector velocidad instantánea empleando componentes. Durante cualquier desplazamiento $\Delta \vec{r}$, los cambios Δx , Δy y Δz en las tres coordenadas de la partícula son las componentes del desplazamiento. Por tanto, las componentes v_x , v_y y v_z de la velocidad instantánea $\vec{v}$ son simplemente las derivadas en el tiempo x , y y z . Es decir:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (\text{componente de la velocidad instantánea})$$

La magnitud del vector de velocidad instantánea $\vec{v}$, esto es, la rapidez, está dada en términos de componentes v_x , v_y y v_z aplicando el teorema de Pitágoras.

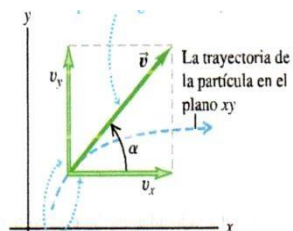
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Cuando la partícula se mueve en el plano xy . Aquí v_z son cero, y la rapidez o la magnitud de la velocidad es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

La dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$ está dada por el ángulo α de la figura.

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{B_y}{B_x}$$



Ejemplo 1.

Se está usando un vehículo robot para explorar la superficie de Marte. El módulo de descenso es el origen de coordenadas; en tanto que la superficie marciana circundante está en el plano xy. El vehículo, que representamos como un punto, tiene coordenadas x y y que varían con el tiempo:

$$x = 2,0 \text{ m} - (0,25 \text{ m/s}^2) t^2$$

$$y = (1,0 \text{ m/s}) t + (0,025 \text{ m/s}^3) t^3$$

- Obtenga las coordenadas del vehículo y su distancia con respecto al módulo en $t = 2 \text{ s}$.
- Obtenga los vectores de desplazamiento y velocidad media del vehículo entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 2 \text{ s}$
- Deduzca una expresión general para el vector de velocidad instantánea del vehículo. Expresé la velocidad instantánea en $t = 2 \text{ s}$ en forma de componentes y además en términos de magnitud y dirección.

Datos

$$x = 2,0 \text{ m} - (0,25 \text{ m/s}^2) t^2$$

$$y = (1,0 \text{ m/s}) t + (0,025 \text{ m/s}^3) t^3$$

Solución

a) Las coordenadas del vehículo y su distancia en $t = 2 \text{ s}$.

$$x = 2,0 \text{ m} - (0,25 \text{ m/s}^2) (2 \text{ s})^2 = 1 \text{ m}$$

$$y = (1,0 \text{ m/s}) (2 \text{ s}) + (0,025 \text{ m/s}^3) (2 \text{ s})^3 = 2,2 \text{ m}$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1 \text{ m})^2 + (2,2 \text{ m})^2} = \mathbf{2,4 \text{ m}}$$

b) El desplazamiento y la velocidad media entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 2 \text{ s}$

Posición $\vec{r}_1$ en el instante $t = 0 \text{ s}$

$$x = 2,0 \text{ m} - (0,25 \text{ m/s}^2) (0 \text{ s})^2 = \mathbf{2 \text{ m}}$$

$$y = (1,0 \text{ m/s}) (0 \text{ s}) + (0,025 \text{ m/s}^3) (0 \text{ s})^3 = \mathbf{0 \text{ m}}$$

$$\vec{r}_1 = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{r}_1 = \mathbf{(2\vec{i} + 0\vec{j}) \text{ m}}$$

Posición $\vec{r}_2$ en el instante $t = 2 \text{ s}$

$$\vec{r}_2 = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = \mathbf{(1\vec{i} + 2,2\vec{j}) \text{ m}}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

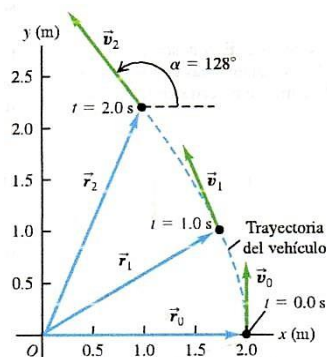
$$\Delta\vec{r} = (\vec{i} + 2,2\vec{j}) \text{ m} - (2\vec{i} + 0\vec{j}) \text{ m}$$

$$\Delta\vec{r} = \mathbf{(-\vec{i} + 2,2\vec{j}) \text{ m}}$$

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{(-\vec{i} + 2,2\vec{j}) \text{ m}}{2 \text{ s} - 0 \text{ s}}$$

$$\vec{v}_{\text{med}} = \mathbf{(-0,5\vec{i} + 1,1\vec{j}) \text{ m/s}}$$



c) Las componentes de la velocidad instantánea son las derivadas

respecto a t :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \mathbf{(-0,25 \text{ m/s}^2) (2t)}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \mathbf{1 \text{ m/s} + (0,025 \text{ m/s}^3) (3t^2)}$$

Las componentes de la velocidad instantánea en el tiempo $t = 2 \text{ s}$

$$v_x = (-0,50 \text{ m/s}^2) (2 \text{ s}) = \mathbf{-1 \text{ m/s}}$$

$$v_y = 1 \text{ m/s} + (0,075 \text{ m/s}^3) (2 \text{ s})^2 = \mathbf{1,3 \text{ m/s}}$$

$$d = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1 \text{ m/s})^2 + (1,3 \text{ m/s})^2} = \mathbf{1,6 \text{ m/s}}$$

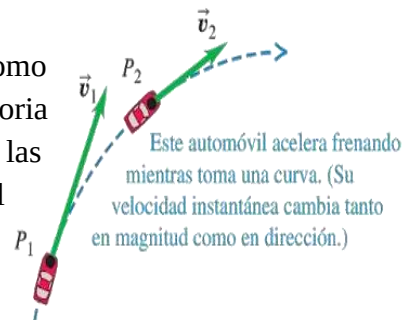
$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1 \text{ m/s}}{1,3 \text{ m/s}} = \mathbf{38^\circ + 90^\circ = 128^\circ}$$

4.2. Vector aceleración

Consideremos la aceleración de una partícula que se mueve en el espacio. Al igual que en el movimiento rectilíneo, la aceleración describe el cambio en la velocidad de la partícula; no obstante, aquí la

trataremos como un vector para describir los cambios tanto en la magnitud de la velocidad (es decir, la rapidez) como en la dirección de la velocidad, en que se mueve la partícula (Pérez, H. 2013).

En la figura, un automóvil (tratado como partícula) se mueve en una trayectoria curva. Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ representan las velocidades instantáneas del auto en el automóvil que se mueve por una curva de P_1 P_2 y se obtiene $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.



Definimos la **aceleración media** $\vec{a}_{med}$ del auto en este intervalo como el cambio de velocidad dividido entre el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\vec{a}_{med-x} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{Vector aceleración media})$$

La **aceleración instantánea** $\vec{a}$ en el punto P_1 como el límite de la aceleración media cuando el punto P_2 se acerca a P_1 $\Delta\vec{v}$ y Δt se acerca a cero. La aceleración instantánea también es igual a la tasa de (variación) instantánea de cambio de velocidad con el tiempo.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{vector de aceleración instantánea})$$

El vector de velocidad $\vec{v}$, es tangente a la trayectoria de la partícula, como se muestra en la figura, si la trayectoria es curva, el vector de aceleración instantánea $\vec{a}$ siempre apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria, es decir, hacia el interior de cualquier curva descrita por la partícula. (Pérez, H. 2013).

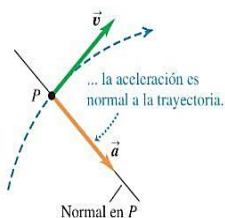
Normalmente nos interesará la aceleración instantánea. Cada componente del vector de aceleración es la derivada de la componente correspondiente de la velocidad:

$$\mathbf{a}_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \mathbf{a}_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \mathbf{a}_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (\text{componentes de la aceleración instantánea})$$

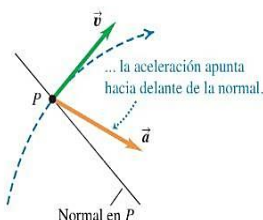
El vector de aceleración de una partícula en una trayectoria curva puede estudiarse en tres situaciones distintas; cuando la rapidez de la partícula es constante, cuando crece y cuando decrece.

Ejemplo 2.

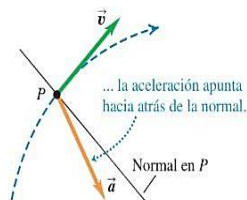
a) Cuando la rapidez es constante en una trayectoria curva ...



b) Cuando la rapidez se incrementa en una trayectoria curva ...



c) Cuando la rapidez disminuye en una trayectoria curva ...



Un meteorito se desplaza por el cielo con una velocidad que varía con el tiempo: $\vec{v}(t) = (1 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s}^2 t)\vec{i} + (1 \text{ m/s}^3 t^2)\vec{j}$. Calcular:

- Su aceleración media entre los instantes $t_1 = 2 \text{ s}$ y $t_2 = 4 \text{ s}$
- La aceleración instantánea en $t = 4 \text{ s}$ en forma de componentes

Datos

$$\vec{v}(t) = (1 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s}^2 t)\vec{i} + (1 \text{ m/s}^3 t^2)\vec{j}$$

Solución

a) Sustituimos $t_1 = 2 \text{ s}$ y $t_2 = 4 \text{ s}$ en la ecuación

$$\vec{v}_1 = [1 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s}^2 (2 \text{ s})]\vec{i} + [(1 \text{ m/s}^3 (2 \text{ s})^2)]\vec{j}$$

$$\vec{v}_1 = (9\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = [1 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s}^2(4 \text{ s})]\vec{i} + [(1 \text{ m/s}^3(4 \text{ s})^2)]\vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = (17\vec{i} + 16\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_{\text{med-x}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{a}_{\text{med-x}} = \frac{(17\vec{i} + 16\vec{j}) \text{ m/s} - (9\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ m/s}}{4 \text{ s} - 2 \text{ s}}$$

$$\vec{a}_{\text{med-x}} = \frac{(8\vec{i} + 12\vec{j}) \text{ m/s}}{2 \text{ s}}$$

$$\vec{a}_{\text{med-x}} = (4\vec{i} + 6\vec{j}) \text{ m/s}$$

b) La aceleración instantánea en $t = 4 \text{ s}$ en forma de componentes.

$$\vec{a}_x = \frac{dv_x}{dt} = (4 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

$$\vec{a}_y = \frac{dv_y}{dt} = (2 \text{ m/s}^3 t)\vec{j} = (2 \text{ m/s}^3 \cdot 4 \text{ s})\vec{j} = (8 \text{ m/s}^2)\vec{j}$$

Ejemplo 3.

Un móvil parte del reposo y después de 2 min de moverse por una trayectoria recta, adquiere una velocidad de $(60\vec{i} - 65\vec{j}) \text{ km/h}$. Determinar:

- La aceleración producida.
- La velocidad media.
- La rapidez media
- El desplazamiento
- La distancia recorrida

Datos

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$\Delta t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$$

$$\vec{v}_f = (60\vec{i} - 65\vec{j}) \text{ km/h} = (16,67\vec{i} - 18,06\vec{j}) \text{ m/s}.$$

Solución

$$\text{a) } \vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{(16,67\vec{i} - 18,06\vec{j}) \text{ m/s}}{120 \text{ s}} = (0,14\vec{i} - 0,15\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } \vec{v}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_f}{2} = \frac{(16,67\vec{i} - 18,06\vec{j}) \text{ m/s}}{2} = (8,34\vec{i} - 9,03\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\text{c) } v_{\text{med}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8,34)^2 + (9,03)^2} = 12,29 \text{ m/s}$$

$$\text{d) } \vec{\Delta r} = \vec{v}_0 t + 1/2 \cdot \vec{a} t^2 = 1/2 (0,14\vec{i} - 0,15\vec{j}) \text{ m/s}^2 (14\,400 \text{ s}^2)$$

$$\vec{\Delta r} = (2\,016\vec{i} - 2\,160\vec{j}) \text{ m}$$

$$e) d = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(2016)^2 + (2160)^2} = 2\,954,63 \text{ m/s}$$

Ejemplo 4.

Cuando la velocidad de un automóvil animado de movimiento rectilíneo es $(-10\vec{i} + 15\vec{j}) \text{ m/s}$, se le comunica una aceleración de modulo 5 m/s^2 en sentido opuesto al de la velocidad durante 8 s. Determinar:

- El desplazamiento realizado.
- La distancia recorrida.
- La velocidad media
- La velocidad final del automóvil.

Datos

$$\vec{v}_0 = (-10\vec{i} + 15\vec{j}) \text{ m/s} = (18,03 \text{ m/s}; 123, 69^\circ) \text{ m/s}$$

$$a = -5 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = (-5 \text{ m/s}^2; 123, 69^\circ) \text{ m/s}^2 = (2,77\vec{i} - 4,16\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\Delta t = 8 \text{ s}$$

Solución

$$a) \vec{\Delta r} = \vec{v}_0 t + 1/2 \cdot \vec{a} t^2$$

$$\vec{\Delta r} = (-10\vec{i} + 15\vec{j}) \text{ m/s} (8 \text{ s}) + 1/2 (2,77\vec{i} - 4,16\vec{j}) \text{ m/s}^2 (64 \text{ s}^2)$$

$$\vec{\Delta r} = (-80\vec{i} + 120\vec{j}) \text{ m} + (88,64\vec{i} - 133,12\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{\Delta r} = (8,64\vec{i} - 13,12\vec{j}) \text{ m}$$

b) Calculamos el tiempo $v_f = 0$

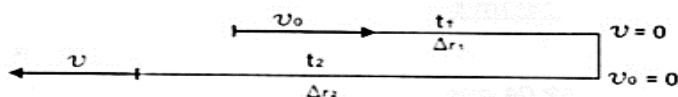
$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

$$t_1 = \frac{-v_0}{a} = \frac{-18,03 \text{ m/s}}{-5 \text{ m/s}^2} = 3,61 \text{ s}$$

(tiempo de ida con movimiento retardado)

$$t_2 = 8 \text{ s} - 3,61 \text{ s} = 4,39 \text{ s}$$

(tiempo de regreso con movimiento acelerado)



$$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2$$

$$\Delta r = (v_{0t} + 1/2 \cdot a \cdot t^2) + (v_{0t} + 1/2 \cdot a \cdot t^2)$$

$$\Delta r = [(18,03 \text{ m/s})(3,61 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-5 \text{ m/s}^2)(13,03 \text{ s}^2)] + [\frac{1}{2} (5 \text{ m/s}^2)(19,27 \text{ s}^2)]$$

$$\Delta r = [65,09 \text{ m} - 32,58 \text{ m}] + [48,18 \text{ m}]$$

$$\Delta r = 80,69 \text{ m}$$

$$\text{c) } \vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(8,64\vec{i} - 13,12\vec{j}) \text{ m}}{8 \text{ s}} = (1,08\vec{i} - 1,64\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\text{d) } \vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{v}_f = (-10\vec{i} + 15\vec{j}) \text{ m/s} + (2,77\vec{i} - 4,16\vec{j}) \text{ m/s}^2(8 \text{ s})$$

$$\vec{v}_f = (-10\vec{i} + 15\vec{j}) \text{ m/s} + (22,16\vec{i} - 33,28\vec{j}) \text{ m/s} = (12,16\vec{i} - 18,28\vec{j}) \text{ m/s}$$

Ejercicio 8

1) Calcula la aceleración en (m/s^2) que se aplica a un móvil que se desplaza con una velocidad de $(40\vec{i} - 50\vec{j}) \text{ km/h}$ a $(60\vec{i} - 80\vec{j}) \text{ km/h}$, en 8 segundos.

2) La brújula de un avión indica que va al norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h. Si hay un viento de 100 km/h al este. ¿Cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

3) Se está probando un Jet. El módulo de descenso es el origen de coordenadas; en tanto que la superficie está en el plano xy. El Jet, que representamos como un punto, tiene coordenadas x y y que varían con el tiempo: $x = 3 \text{ m} - (0,2 \text{ m/s}^2) t^2$

$$y = (2 \text{ m/s}) t + (0,02 \text{ m/s}^3) t^3$$

¿Cuáles son las coordenadas y su distancia con respecto al módulo en $t = 3 \text{ s}$?

4) Un cuerpo que parte del reposo en una carretera recta adquiere una velocidad de $(-62\vec{i} - 50\vec{j}) \text{ m/s}$ en 12 segundos. Determinar:

- a) La aceleración producida
- b) La velocidad media
- c) La rapidez media
- d) El desplazamiento realizado
- e) La distancia recorrida

5) Un móvil arranca y recorre 130 metros con una aceleración de $(-1,2\vec{i} - 1,5\vec{j}) \text{ m/s}^2$ por una trayectoria rectilínea. Determinar:

- a) El tiempo empleado
- b) El desplazamiento realizado
- c) La velocidad final
- d) La velocidad media
- e) La rapidez media

6) Un móvil que va por una carretera recta con una velocidad de $(-4\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ m/s}$, recorre 15 m con una aceleración de módulo 0,5 determinar:

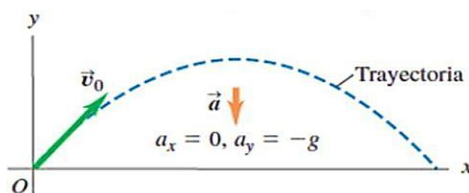
- a) La velocidad alcanzada

- b) El tiempo empleado
 - c) El desplazamiento realizado
 - d) La velocidad media
 - e) La rapidez media
- 7) La velocidad de un móvil animado de movimiento rectilíneo pasa de $(10\vec{i} - 8\vec{j})$ m/s a $(28\vec{i} - 25\vec{j})$ m/s, por la acción de una aceleración de módulo 0,6 m/s. Determinar:
- a) El tiempo empleado
 - b) La velocidad media
 - c) La rapidez media
 - d) La distancia recorrida
 - e) El desplazamiento realizado
- 8) Un coche que va por una carretera recta con una rapidez de 5 m/s, es acelerado durante 10 s, tiempo en que se realiza un desplazamiento de $(65\vec{i} + 84\vec{j})$ m. Determinar:
- a) La aceleración producida
 - b) La velocidad inicial
 - c) La velocidad final
 - d) La velocidad media
 - e) La rapidez media
- 9) Cuando la velocidad de un automóvil animado de movimiento rectilíneo es $(-15\vec{i} + 20\vec{j})$ m/s, se le comunica una aceleración de módulo 6 m/s^2 en sentido opuesto al de la velocidad durante 10 s. Determinar:
- a) El desplazamiento realizado
 - b) La distancia recorrida.
 - c) La velocidad media
 - d) La velocidad final del automóvil.
- 10) Un móvil que va por una carretera recta con una rapidez de 5 m/s, es acelerado durante 10 s, tiempo en que realiza un desplazamiento de $(65\vec{i} + 84\vec{j})$ m. determinar:
- a) La aceleración producida
 - b) La velocidad inicial
 - c) La velocidad final
 - d) La velocidad media

e) La rapidez media

4.3. Movimiento de proyectiles

Un **proyectil** es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria**.



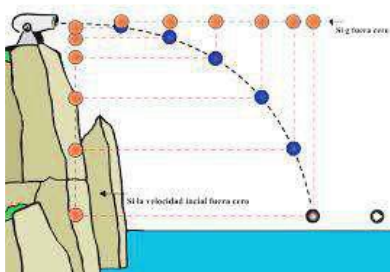
Podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación bidimensional de: movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.

Las componentes son: $a_x = 0$ $a_y = -g = (-9,8\vec{j}) \text{ m/s}^2$ en el sistema Internacional (movimiento de proyectil, sin resistencia del aire).

Existen **dos tipos de tiro parabólico: horizontal y oblicuo**. El primero (tiro parabólico horizontal) se caracteriza por la trayectoria curva que sigue un objeto al ser lanzado horizontalmente al vacío. El segundo (tiro parabólico oblicuo) se caracteriza porque la trayectoria que sigue un objeto lanzado forma un ángulo con el eje horizontal (Pérez, H. 2013).

El movimiento del objeto lanzado se moverá en direcciones xy, por eso al tratar un problema donde hay tiro parabólico, ya sea horizontal u oblicuo, será indispensable elegir el sistema de coordenadas puesto que el eje y debe ser vertical y positivo.

Tiro parabólico horizontal.



Tiro parabólico oblicuo.



Componentes de la velocidad inicial **Desplazamiento horizontal** **Altura máxima**

$v_{0x} = v \cdot \cos \theta$	$v_{0y} = v \cdot \sin \theta$	$x = v_{0x} \cdot t$	$v_f^2 = v_0^2 + 2gh$
--------------------------------	--------------------------------	----------------------	-----------------------

Componentes horizontal y vertical de la velocidad. Altura máxima

$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$	$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$
----------------	---------------------	-------------------------------

Posición horizontal y vertical

$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$	$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2$
----------------------------	---

Tiempo de subida y tiempo de bajada. Tiempo en el aire

$t_{\text{subir}} = \frac{v_{0y}}{g}$	$t_{\text{bajar}}^2 = \frac{2y}{g}$	$t_{\text{aire}} = \frac{2v_{0y}}{g}$
---------------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------------

Rapidez del proyectil en cualquier instante. Ángulo formado con el eje x

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$	$\alpha = \tan^{-1} = \frac{v_y}{v_x}$
-----------------------	--

Ejemplo 1.

Un avión de rescate deja caer un paquete de provisiones de emergencia a un barco que se encuentra parado en medio del océano. El avión vuela

horizontalmente a 90 m/s y a una altura de 400 m sobre el nivel del mar.
Calcular:

- El tiempo que tardará el paquete en llegar al barco
- La distancia recorre el paquete desde que es lanzado
- La velocidad con que el paquete llega al barco

Datos

$$v_{0x} = v_x = 90 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 0$$

$$y = 400 \text{ m}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Solución

$$a) t_{bajada}^2 = \frac{2y}{g} = \frac{800 \cancel{\text{m}}}{9,8 \cancel{\text{m}}/\text{s}^2}$$

$$t = 9,04 \text{ s}$$

$$b) x = v_{0x} \cdot t$$

$$x = (90 \text{ m/s}) (9,04 \cancel{\text{s}})$$

$$x = 81,36 \text{ m}$$

$$c) v_y = v_{0y} - gt$$

$$v_y = -gt = (-9,8 \text{ m/s}^2) (9,04 \cancel{\text{s}})$$

$$v_y = -88,59 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = (90\vec{i} - 88,59\vec{j}) \text{ m/s}$$

Ejemplo 2.

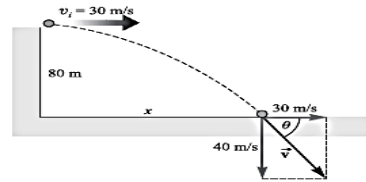
Como se muestra en la figura, desde la cima de un risco de 80 m de alto se dispara un proyectil con una rapidez horizontal de 30 m/s.
Determinar:

- ¿Cuánto tiempo necesitará para chocar con el suelo en la base del risco?
- ¿A qué distancia del pie del risco será el choque?
- ¿Con qué velocidad se estrellará?

Datos

$$v = 30 \text{ m/s}$$

$$h = 80 \text{ m}$$



Solución

$$\text{a) } t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2(-80\cancel{\text{m}})}{-9,8\cancel{\text{m/s}^2}}$$

$$t^2 = 16,33 \text{ s}^2$$

$$t = 4,04 \text{ s}$$

$$\text{b) } x = \cancel{x_0} + v_{ox} \cdot t$$

$$x = v_{ox} \cdot t$$

$$x = 30 \text{ m/s} (4,04 \cancel{\text{s}})$$

$$x = 121,2 \text{ m}$$

$$\text{c) } v_y = -g \cdot t$$

$$v_y = (-9,8 \text{ m/s}^2) (4,04 \cancel{\text{s}})$$

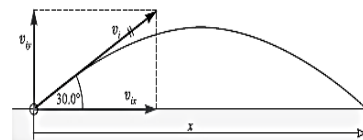
$$v_y = -40 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} - v_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = (30\vec{i} - 40\vec{j}) \text{ m/s}$$

Ejemplo 3.

Se lanza una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 100 m/s con un ángulo de 30° en relación con la horizontal, como se muestra en la figura. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento alcanzará la pelota su nivel inicial?



Datos

$$v = 100 \text{ m/s}$$

$$\theta = 30^\circ$$

Solución

$$v_x = 100 \text{ m/s} \cos 30^\circ$$

$$v_y = 100 \text{ m/s} \sin 30^\circ$$

$$v_x = 86,6 \text{ m/s}$$

$$v_y = 50 \text{ m/s}$$

$$t_s = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{50 \cancel{\text{m/s}}}{9,8 \cancel{\text{m/s}^2}} = 5,1 \text{ s (2)} = 10,2 \text{ s}$$

$$x = v_{ox} \cdot t = 86,6 \cancel{\text{m/s}} (10,2 \cancel{\text{s}}) = 883,32 \text{ m}$$

Ejemplo 4.

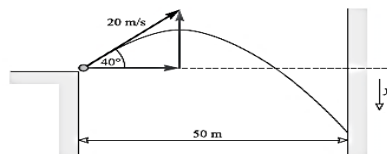
Como se muestra en la figura, se lanza una pelota desde lo alto de un edificio hacia otro más alto, a 50 m de distancia. La velocidad inicial de la pelota es de 20 m/s, con una inclinación de 40° **sobre la horizontal**. ¿A qué distancia, por encima o por debajo de su nivel inicial, golpeará la pelota sobre la pared opuesta?

Datos

$$v = 20 \text{ m/s}$$

$$\theta = 40^\circ$$

$$x = 50 \text{ m}$$



Solución

$$v_x = 20 \text{ m/s} \cos 40^\circ$$

$$v_y = 20 \text{ m/s} \sin 40^\circ$$

$$v_x = 15,3 \text{ m/s}$$

$$v_y = 12,9 \text{ m/s}$$

Considere primero el movimiento horizontal

$$v_x = v_{ox} = v_{fx} = 15,3 \text{ m/s}$$

$$x = v_{ox}t$$

$$50 \text{ m} = 15,3 \text{ m/s} \cdot t$$

$$t = 3,27 \text{ s}$$

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 12,9 \text{ m/s}(3,27 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9,8 \text{ m/s}^2)(3,27 \text{ s})^2$$

$$y = -10,2 \text{ m}$$

La caída, la pelota golpeará a una distancia de **10,2 m por debajo de su nivel inicial**.

Ejemplo 5.

Un cuerpo rueda sobre el tablero horizontal de una mesa de 1,05 m de altura y abandona ésta con una velocidad de $(4\vec{i})$ m/s. Determinar:

- A qué distancia del borde de la mesa, el cuerpo golpea el suelo.
- La posición del cuerpo cuando llega al suelo
- Con qué velocidad golpea contra el suelo.

Datos

$$v_x = v_{ox} = v_{fx} = (4\vec{i}) \text{ m/s}$$

$$h = 1,05 \text{ m}$$

Solución

$$\text{a) } t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2(-1,05 \text{ m})}{-9,8 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 0,46 \text{ s}$$

$$x = v_{ox} \cdot t$$

$$x = 4 \text{ m/s} (0,46 \text{ s})$$

$$x = 1,84 \text{ m}$$

$$\text{b) } \vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j}$$

$$\vec{r} = (1,84\vec{i} - 1,05\vec{j}) \text{ m}$$

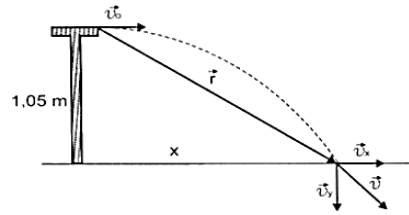
$$\text{c) } v_y = v_{oy} + g \cdot t$$

$$v_y = (-9,8\vec{j}) \text{ m/s}^2 (0,46 \text{ s})$$

$$v_y = (-4,5\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = (4\vec{i} - 4,5\vec{j}) \text{ m/s}$$



Ejercicio 9

- 1) Un bebé lanza el tetero con una velocidad horizontal de 1,5 m/s, desde su silla de comedor de 1,2 metros de alto. ¿A qué distancia horizontal de la silla de comedor cae el tetero al suelo?
- 2) Un helicóptero, que lleva medicamentos, vuela a una velocidad de 450 km/h, y una altura de 1200 m. ¿A qué distancia horizontal, antes de llegar al campamento donde debe entregar los medicamentos deberá soltarlos para que caiga justo en el campamento?
- 3) Un arquero lanza del suelo una pelota con una velocidad de 20 m/s a una elevación de 50° . ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo?
- 4) Un nadador quiere cruzar transversalmente un río cuya velocidad del agua en la superficie es 3 m/s, si la velocidad del nadador es de 1,20 m/s. ¿Cuál será la velocidad resultante con la que logró pasar el río?
- 5) Desde la superficie de una mesa de 1,4 m de alto se lanza horizontalmente una pelota, con velocidad inicial de 6 m/s. ¿Qué tiempo tarda la pelota en llegar al suelo?
- 6) Desde un avión que va a 180 km por hora se lanza una bomba que cae a tierra 12 segundos después de lanzamiento. Determinar:
 - a) La altura en que se encontraba el avión al momento del lanzamiento.
 - b) La distancia horizontal donde cayó la bomba
- 7) Se lanza una moneda al aire formando un ángulo con la horizontal. Cuando se encuentra a 1,5 m del sitio que se lanzó, las componentes de su velocidad son 2,6 m/s en el eje x y 1,82 m/s en el eje y. ¿Con qué velocidad fue lanzada?
 - a) La posición de la pelota al chocar con el piso
 - b) La velocidad de la pelota cuando choca con el piso
- 8) Un balón se dispara con velocidad de 15 m/s, formando con la horizontal un ángulo de 37° . Determinar
 - a) Las componentes de la velocidad inicial
 - b) El tiempo en alcanzar la altura máxima
 - c) La altura máxima
 - d) La distancia horizontal que alcanza al caer al piso

9) Una bola de tenis rueda sobre el tablero horizontal de una mesa de 1,15 m de altura y abandona ésta con una velocidad $(5\vec{i})$ m/s. Determinar:

a) La posición del cuerpo cuando llega al suelo

b) Con qué velocidad golpea contra el suelo

10) los peldaños de una escalera miden 15 cm de altura y 32 cm horizontalmente. Determinar:

a) El tiempo en el instante del primer impacto

b) La velocidad que tiene la bola en el instante del primer impacto en la mitad del cuarto escalón

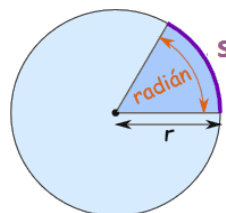
4.4. Movimiento circular

En nuestra vida cotidiana observamos diferentes partículas, describiendo movimientos circulares, tal es el caso de una de una persona que sube a una rueda de la fortuna, una niña que disfruta en un carrusel, o una piedra atada al extremo de una cuerda y que se hace girar. En el movimiento circular de una partícula, resulta práctico considerar que el origen del sistema de referencia se encuentra en el centro de la trayectoria circular. (Cuéllar, C. 2013).

Ángulo: es la abertura comprendida entre dos radios que limitan un arco de circunferencia.

Radian: es el ángulo central al que corresponde un arco de longitud igual al radio. La equivalencia de un radian sexagesimales se determina sabiendo que:

$$\begin{aligned}2\pi \text{ rad} &= 360^\circ \\1 \text{ rad} &= \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \\1 \text{ rad} &= 57,3^\circ\end{aligned}$$



Longitud de arco (s) es la *distancia recorrida* a lo largo de la trayectoria circular y se mide en m, el **radio (r)** en m y el **ángulo (θ) en radianes**.

$$s = \theta \cdot r$$

Ejemplo 1.

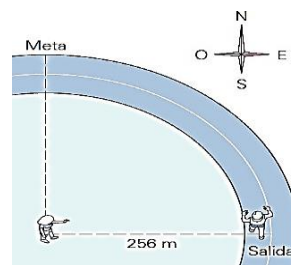
Una espectadora parada en el centro de una pista circular de atletismo observa a un corredor que inicia una carrera de práctica 256 m al este de su propia posición, como se observa en la figura. El atleta corre por el mismo carril hasta la meta, la cual está situada directamente al norte de la posición de la observadora. ¿*Qué distancia correrá?*

Datos

$\theta = 90^\circ = (\pi/2 \text{ rad.})$ Pista circular

$r = 256 \text{ m}$

$s = ?$



Solución

$s = \theta \cdot r$

$s = (\pi/2 \text{ rad.}) (256 \text{ m})$

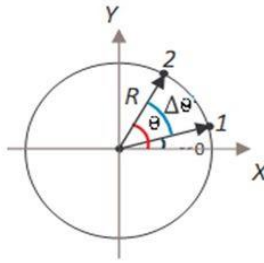
$s = 402 \text{ m}$. Observe que omitimos la unidad rad

Velocidad angular

La magnitud de la **velocidad angular (ω)** representa el cociente entre la magnitud del *desplazamiento angular (θ)* de un cuerpo y el *tiempo (t)* que tarda en efectuarlo. (Cromer, A. 2008).

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{velocidad angular}$$

La magnitud de la *velocidad angular* se puede expresar en función de los *cambios en la magnitud de su desplazamiento angular* con respecto al *cambio de tiempo*, se la puede expresar de la siguiente manera. Su unidad en el sistema internacional (**SI**) se mide en rad/s.



$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

Velocidad angular media

Cuando la velocidad angular de un cuerpo no es constante o uniforme, podemos determinar la magnitud de la velocidad angular media (ω_m) al conocer las magnitudes de la velocidad angular inicial y su velocidad angular final.

$$\omega_m = \frac{\omega_o + \omega_f}{2}$$

Significado

ω_m = magnitud de la velocidad angular media en (rad/s)

ω_o = magnitud de la velocidad angular inicial en (rad/s)

ω_f = magnitud de la velocidad angular final en (rad/s)

4.4.1. Movimiento circular uniforme

El *movimiento circular uniforme (MCU)*, se produce cuando un cuerpo o partícula con una magnitud de velocidad angular constante describe ángulos iguales en tiempos iguales, lo que significa que todas las vueltas serán recorridas en tiempos iguales. Un ejemplo de este movimiento es un automóvil que da vueltas por una pista circular.

¿Qué es periodo y frecuencia?

Periodo: el tiempo que tarda un objeto en movimiento circular en efectuar una revolución completa (un *ciclo*) se denomina *periodo* (**T**). Por ejemplo, el periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol es un año, y el periodo de la rotación axial de la Tierra es 24 horas. La unidad estándar de *periodo es el segundo* (**s**). (Cromer, A. 2008).

Frecuencia: algo estrechamente relacionado con el periodo es la *frecuencia* (**f**), que es el número de revoluciones o ciclos que se efectúan en un tiempo dado. Por ejemplo, si una partícula que viaja uniformemente en una órbita circular efectúa 5 revoluciones en 2 s. La unidad de frecuencia es el recíproco de segundos (**1/s o s⁻¹**), que se llama *Hertz* (**Hz**) en el SI.

$f = \frac{1}{T}$	$T = \frac{t}{n}$	$f = \frac{n}{t}$	$T = \frac{2 \pi \text{ rad}}{\omega}$	$f = \frac{\omega}{2 \pi \text{ rad}}$
-------------------	-------------------	-------------------	--	--

Ejemplo 2.

Un disco compacto (**CD**) gira en un reproductor con rapidez constante de 200 RPM. Calcule:

- La frecuencia
- El periodo de revolución del CD.

Datos

$$\omega = \frac{200 \text{ rev.}}{\text{min}} \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \left(\frac{2 \pi \text{ rad.}}{1 \text{ rev.}} \right) = \mathbf{20,9 \text{ rad/s}}$$

Solución

$$\text{a) } f = \frac{\omega}{2 \pi \text{ rad}} = \frac{20,9 \text{ rad/s}}{6,2832 \text{ rad}} = \mathbf{3,33 \text{ Hz}}$$

$$\text{b) } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3,33 \text{ Hz}} = \mathbf{0,300 \text{ s}}$$

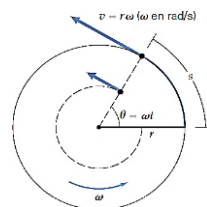
La magnitud de la velocidad angular (**ω**) también se puede expresar si se conoce su periodo (**T**), es decir, el tiempo que tarda en dar una vuelta

completa o una revolución ($360^\circ = 2\pi$ radianes). La expresión que se utiliza es:

$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T}$	$\omega = 2\pi f$
---------------------------------------	-------------------

Si la *velocidad angular* es constante, la rapidez de la partícula es *tangencial* (v). De manera que la *velocidad angular* (ω) se mide **rad/s** y la rapidez tangencial se mide en **m/s** en el SI y se determina a partir de las ecuaciones.

$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T}$
$v = \omega \cdot r$



Como en el MCU la *velocidad angular* (ω) es constante, también la rapidez (v) (módulo de la velocidad) es constante, lo que hace que *no se genere aceleración tangencial* (a_t), pero la variación continua de la velocidad en dirección genera una aceleración centrípeta o normal (a_c), que es igual a la aceleración total (a), y su unidad es m/s^2 en el SI.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

$$\vec{a} = \vec{a}_c$$

El módulo de la aceleración centrípeta es constante e igual a:

$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = v \cdot \omega$

Conociendo el desplazamiento angular ($\Delta\theta$), se puede calcular el número de vueltas (n) que da la partícula. . (Cromer, A. 2008).

$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi \text{ rad}}$

Ejemplo 3.

En el parque de diversiones un carrusel su velocidad de operación constante efectúa una rotación completa en 45 s. Dos niños están montados en caballos, uno a 3 m del centro del carrusel, y el otro, a 6 m. Calcule:

- La rapidez angular
- La rapidez tangencial de cada niño

Datos

$$\theta = 2 \pi \text{ rad.}$$

$$t = 45 \text{ s}$$

$$r_1 = 3 \text{ m}$$

$$r_2 = 6 \text{ m}$$

Solución

$$\text{a) } \omega_1 = \omega_2$$

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2 \pi \text{ rad}}{45 \text{ s}} = 0,14 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,14 \text{ rad/s}$$

$$\text{b) } v = \omega \cdot r$$

$$v_1 = (0,14 \text{ rad/s}) (3 \text{ m}) = 0,42 \text{ m/s}$$

$$v_2 = (0,14 \text{ rad/s}) (6 \text{ m}) = 0,84 \text{ m/s}$$

Ejemplo 4.

Una centrifuga de laboratorio opera con una rapidez rotacional de 12 000 RPM. ¿Qué magnitud tiene la aceleración centrípeta de un glóbulo rojo que está a una distancia radial de 8 cm del eje de rotación de la centrifuga?

Datos

$$\omega = 12\,000 \text{ RPM} = 1,26 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$r = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$$

$$a_c = ?$$

Solución

$$a_c = \omega^2 \cdot r$$

$$a_c = (1,26 \times 10^3 \text{ rad/s})^2 (0,08 \text{ m})$$

$$a_c = 1,27 \times 10^5 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 5.

Una partícula da 400 RPM en una circunferencia de 1,4 metros de radio, si se mueve en sentido antihorario durante 6 segundos. Determinar:

- Su velocidad angular.
- Su periodo.
- El módulo de la aceleración centrípeta.
- El desplazamiento angular en 6 s.
- Cuántas vueltas da en los 6 s.

Datos

$$\omega = 400 \text{ RPM}$$

$$r = 1,4 \text{ m}$$

$$t = 6 \text{ s}$$

Solución

a) $\omega = 400 \text{ RPM}$

$$\omega = 400 \frac{6,2832 \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 41,89 \text{ rad/s}$$

b) $T = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega}$

$$T = \frac{6,2832 \text{ rad}}{41,89 \text{ rad/s}} = 0,15 \text{ s}$$

c) $a_c = \omega^2 \cdot r$

$$a_c = (41,89 \text{ rad/s})^2 (1,4 \text{ m}) = 2\,456,68 \text{ m/s}^2$$

d) $\Delta\theta = \omega \cdot t$

$$\theta = (41,89 \text{ rad/s}) (6 \text{ s}) = 251,34 \text{ rad}$$

e) $n = \frac{\Delta\theta}{2\pi \text{ rad}} = \frac{251,34 \text{ rad}}{6,2832 \text{ rad}}$

$$n = 40 \text{ rev}$$

Ejercicio 10

1. La distancia media de la Tierra al sol es $1,5 \times 10^{11}$ metros. Si se considera que la trayectoria que describe la Tierra alrededor del Sol es circular, si sabemos que la Tierra da una vuelta alrededor del Sol en 365 días, es decir, en $3,2 \times 10^7$ segundos. ¿Cuál es la velocidad angular de la Tierra alrededor del Sol?
2. El segundero de un reloj mide 2 cm. Para el movimiento del extremo del segundero determinar:
 - a) La velocidad angular.
 - b) La velocidad lineal para el extremo del segundero.
3. Una espectadora parada en el centro de una pista circular de atletismo observa a un corredor que inicia una carrera de práctica a 220 m al este de su propia posición. El atleta corre por el mismo carril hasta la meta, la cual está situada directamente al oeste de la posición de la observadora. ¿Qué distancia correrá?
4. Un disco duro gira a 1000 revoluciones por minuto (RPM). Encontrar:
 - a) La velocidad angular.
 - b) El período.
 - c) La frecuencia.
5. Una rueda de 35 cm de radio gira 420 revoluciones por minuto (RPM). Encontrar:
 - a) El período.
 - b) La frecuencia.
 - c) La velocidad angular.
 - d) La velocidad lineal en un punto situado en el borde de la rueda
 - e) La velocidad lineal de un punto situado a 20 cm del centro de la rueda
6. Los asientos de una rueda moscovita está a 4 metros del eje. Si el periodo de rotación es de 30 s. Determinar:
 - a) La velocidad angular.
 - b) La velocidad lineal de la rueda.
7. La tierra tiene un radio de $6,37 \times 10^{10}$ m y gira una vuelta completa en 24 horas. Calcular:

- a) El periodo.
 - b) Calcular la velocidad angular de rotación de la tierra.
 - c) La velocidad lineal de un punto situado en el Ecuador.
8. una centrifugadora de laboratorio gira 12 00 RPM. Si el radio es de 30 cm. Determinar:
- a) La velocidad angular.
 - b) La aceleración centrípeta.
9. Un disco gira a razón de 3 vueltas en 12 s. Determinar:
- a) La frecuencia.
 - b) El periodo.
 - c) La velocidad angular
10. En una pista circular de radio 100 m, un auto le da 2 vueltas en cada minuto. Determinar:
- a) El periodo del movimiento del auto.
 - b) La distancia que recorre.
 - c) La velocidad lineal del vehículo.
 - d) La aceleración centrípeta.
 - e) La velocidad angular.
11. Una partícula que se mueve por una trayectoria circular de 1,8 m de radio, gira un ángulo de 130° cada 8 s. Determinar:
- a) La velocidad angular de la partícula.
 - b) La rapidez de la partícula.
 - c) El período.
 - d) La frecuencia.
 - e) El módulo de la aceleración centrípeta.
12. Una partícula da 415 RPM en una circunferencia de 1,2 metros de radio, si se mueve en sentido antihorario durante 5 segundos. Determinar:
- a) Su velocidad angular.
 - b) Su periodo.
 - c) El módulo de la aceleración centrípeta.
 - d) El desplazamiento angular en 5 s.
 - e) Cuantas vueltas da en los 5 s.

4.4.2. Movimiento circular uniformemente acelerado

El movimiento circular uniformemente acelerado (**MCUA**) se presenta cuando un móvil con trayectoria circular aumenta o disminuye en cada unidad de tiempo su velocidad angular, por lo que la *magnitud de su aceleración permanece constante*.

Velocidad angular instantánea

La magnitud de la velocidad angular instantánea representa la *magnitud del desplazamiento angular* efectuado por un móvil en un tiempo muy pequeño que *casi tiende a cero*. (Gettys, W. et al. 1991).

$$\omega_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Aceleración angular media

Cuando durante el movimiento circular de un móvil su velocidad angular no permanece constante, sino que varía, decimos que sufre una *aceleración angular*. Cuando la velocidad angular varía es conveniente determinar cuál es la magnitud de su *aceleración angular media*, la misma que se expresa de la siguiente manera:

$$\alpha_{med} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_o}{t_f - t_o}$$

Significado

α_{med} = magnitud de la aceleración angular media en (**rad/s²**)

ω_f = magnitud de la velocidad angular final en (**rad/s**)

ω_o = magnitud de la velocidad angular inicial en (**rad/s**)

Δt = tiempo durante el cual varía la magnitud de la velocidad angular en segundos (**s**)

Aceleración angular instantánea

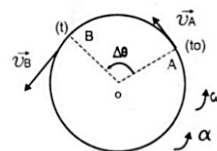
Cuando en el movimiento acelerado de un cuerpo que sigue una trayectoria circular, los intervalos de tiempo considerados son cada vez

más pequeños, la magnitud de la aceleración angular media se aproxima a una aceleración angular instantánea. (Gettys, W. et al. 1991).

Cuando el intervalo de tiempo es tan pequeño que tiende a cero, la magnitud de la aceleración angular del cuerpo será instantánea.

$$\alpha_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

En el MCUA, el vector velocidad varia simultáneamente en modulo, dirección y sentido. Por consiguiente, la aceleración tendrá componentes tangencial y centrípeta (normal).



En cualquier instante el módulo de la aceleración tangencial es:

$$a_T = \alpha \cdot r$$

La velocidad angular de un movimiento circular uniformemente variado es:

$$\omega_f = \omega_o + \alpha \cdot t$$

Para calcular desplazamientos angulares:

$$\theta = \omega_o t + 1/2 \alpha \cdot t^2$$

$$\theta = \frac{\omega_f^2 - \omega_o^2}{2\alpha}$$

Si el móvil parte del reposo, su velocidad angular inicial es cero, y las ecuaciones se reducen a:

$\theta = 1/2 \alpha \cdot t^2$	$\theta = \frac{\omega_f^2}{2\alpha}$	$\theta = \frac{\omega_f}{2}$
---------------------------------	---------------------------------------	-------------------------------

Para calcular la magnitud de las velocidades angulares finales.

$\omega_f = \omega_o + \alpha.t$	$\omega_f^2 = \omega_o^2 + 2.\alpha.\theta$
----------------------------------	---

Si el móvil parte del reposo su velocidad angular inicial es cero, y las dos ecuaciones anteriores se reducen a:

$\omega_f = \alpha.t$	$\omega_f^2 = 2.\alpha.\theta$
-----------------------	--------------------------------

Ejemplo 1.

Un cuerpo que se mueve de manera que su velocidad angular instantánea cambia con el tiempo como se indica en el gráfico. Determina la aceleración angular.

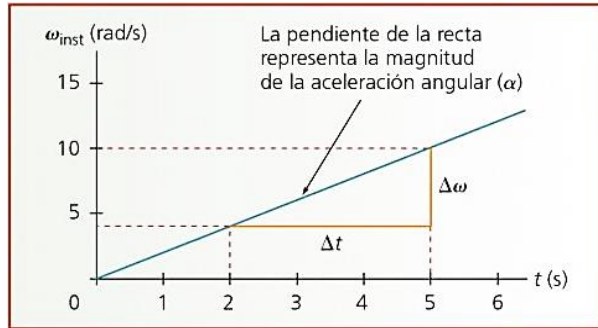
Solución

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t_f - t_o}$$

$$\alpha = \frac{10 \text{ rad/s} - 4 \text{ rad/s}}{5 \text{ s} - 2 \text{ s}}$$

$$\alpha = \frac{6 \text{ rad/s}}{3 \text{ s}}$$

$$\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$$



Ejemplo 2.

Un CD acelera uniformemente desde el reposo hasta su rapidez operativa de 500 rpm en 3,50 s. Calcule la *aceleración angular* del CD durante ese tiempo.

Datos

$$\omega_o = 0$$

$$\omega_f = 500 \text{ rpm} = 52,4 \text{ rad/s}$$

$$t = 3,5 \text{ s.}$$

Solución

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t}$$

$$\alpha = \frac{52,4 \text{ rad/s}}{3,5 \text{ s}}$$

$$\alpha = 15 \text{ rad/s}^2$$

Ejemplo 3.

Determinar la magnitud de la velocidad angular de una rueda a los 0,1 minutos si tenía una velocidad angular inicial cuya magnitud 10 rad/s y sufre una aceleración angular cuya magnitud es 7 rad/s².

Datos

$$\omega_f = ?$$

$$\omega_o = 10 \text{ rad/s}$$

$$t = 0,1 \text{ min} = 6 \text{ s}$$

$$\alpha = 7 \text{ rad/s}^2$$

Solución

$$\omega_f = \omega_o + \alpha \cdot t$$

$$\omega_f = 10 \text{ rad/s} + (7 \text{ rad/s}^2)(6 \text{ s})$$

$$\omega_f = 10 \text{ rad/s} + 42 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 52 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 4.

Un mezclador eléctrico incremento la magnitud de su velocidad angular de 30 rad/s a 130 rad/s en 0,6 s. Si el radio de la trayectoria es de 30 centímetros. Calcular:

- ¿Cuál fue la magnitud de su aceleración media?
- ¿Cuál fue la magnitud de su desplazamiento angular en ese tiempo?
- ¿Cuál fue su distancia recorrida?
- ¿Cuántas vueltas dio?

Datos

$$\omega_o = 30 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 130 \text{ rad/s}$$

$$t = 0,6 \text{ s.}$$

$$r = 30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}$$

Solución

$$\text{a) } \alpha_{\text{med}} = \frac{\omega_f - \omega_o}{t} = \frac{130 \text{ rad/s} - 30 \text{ rad/s}}{0,6 \text{ s}}$$

$$\alpha_{\text{med}} = 166,7 \text{ rad/s}^2$$

$$\text{b) } \Delta\theta = \omega_o t + 1/2 \alpha \cdot t^2$$

$$\Delta\theta = (30 \text{ rad/s})(0,6 \text{ s}) + 1/2(166,7 \text{ rad/s}^2)(0,6 \text{ s})^2$$

$$\Delta\theta = 18 \text{ rad} + 30,01 \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = 48,01 \text{ rad}$$

$$c) S = \theta \cdot r$$

$$S = (48,01 \text{ rad}) (0,30 \text{ m})$$

$$S = 14,4 \text{ m}$$

$$d) n = \frac{\Delta\theta}{2\pi \text{ rad}}$$

$$n = \frac{48,01 \text{ rad}}{6,2832 \text{ rad}}$$

$$n = 7,64 \text{ rev}$$

Ejemplo 5.

Determinar la magnitud de la velocidad angular de una rueda a los 0,1 minutos si tenía una velocidad angular inicial cuya magnitud 10 rad/s y sufre una aceleración angular cuya magnitud es 7 rad/s².

Datos

$$\omega_f = ?$$

$$\omega_o = 10 \text{ rad/s}$$

$$t = 0,1 \text{ min} = 6 \text{ s}$$

$$\alpha = 7 \text{ rad/s}^2$$

Solución

$$\omega_f = \omega_o + \alpha \cdot t$$

$$\omega_f = 10 \text{ rad/s} + (7 \text{ rad/s}^2)(6 \text{ s})$$

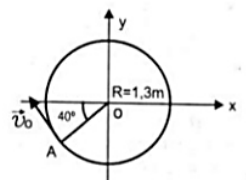
$$\omega_f = 10 \text{ rad/s} + 42 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 52 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 6.

Una partícula se mueve en la trayectoria circular de la figura. Si parte del punto A con una rapidez de 36 km/h y luego de girar un ángulo $(11\pi/3)$ rad, llega al punto B con una rapidez de 10,8 km/h. Determinar:

- La velocidad angular inicial y final.
- La aceleración angular
- El tiempo transcurrido



d) La aceleración tangencial

Datos

$$v_o = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$$

$$v_f = 10,8 \text{ km/h} = 3 \text{ m/s}$$

$$r = 1,3 \text{ m}$$

$$\theta = (11\pi/3) \text{ rad} = 11,52 \text{ rad.}$$

Solución

a) $v = \omega \cdot r$

$$\omega_o = \frac{v_o}{r} = \frac{10 \text{ m/s}}{1,3 \text{ m}} = 7,7 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = \frac{v_f}{r} = \frac{3 \text{ m/s}}{1,3 \text{ m}} = 2,3 \text{ rad/s}$$

b) $\omega_f^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$

$$\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_o^2}{2\theta} = \frac{(2,3 \text{ rad/s})^2 - (7,7 \text{ rad/s})^2}{2(11,52 \text{ rad})}$$

$$\alpha = -2,34 \text{ rad/s}^2$$

c) $t = \frac{\omega_f - \omega_o}{\alpha} = \frac{2,3 \text{ rad/s} - 7,7 \text{ rad/s}}{-2,34 \text{ rad/s}^2}$

$$t = \frac{-5,4 \text{ rad/s}}{-2,34 \text{ rad/s}^2}$$

$$t = 2,3 \text{ s}$$

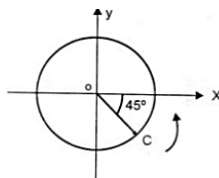
d) $a_T = \alpha \cdot r$

$$a_T = (-2,34 \text{ rad/s}^2) (1,3 \text{ m})$$

$$a_T = (-3,04 \text{ m/s}^2)$$

Ejercicio 11

1. Un engrane adquirió una velocidad angular cuya magnitud es de $2\,512\text{ rad/s}$ en $1,4\text{ s}$. ¿Cuál fue la magnitud de su aceleración angular?
2. Una rueda gira con una magnitud de velocidad angular inicial de $18,8\text{ rad/s}$ experimentando una aceleración angular cuya magnitud es de 4 rad/s^2 que dura 7 segundos . ¿Cuál es el desplazamiento angular a los 7 segundos ?
3. Una rueda gira a 4 rev/s aumenta su frecuencia a 20 rev/s en 2 segundos . Determinar la aceleración angular.
4. Una hélice gira inicialmente con una velocidad angular de 10 rad/s y recibe una aceleración angular constante de 3 rad/s^2 . ¿Cuál será la velocidad angular después de 8 segundos ?
5. ¿Cuál es la aceleración angular de una rueda que adquiere una velocidad angular de 360 rad/s en 2 segundos ?
6. Un disco que gira a 45 RPM , de detiene después de 5 segundos . Calcular su aceleración angular.
7. Una partícula parte del reposo desde el punto C en sentido antihorario con una aceleración tangencial constante de 4 m/s^2 y gira un ángulo de $(13\pi/3)\text{ rad}$ en una trayectoria circular de 1 m de radio. Determinar:
 - a) La aceleración angular.
 - b) La velocidad angular final.



8. Una banda gira con una velocidad angular inicial de 10 rad/s y recibe una aceleración angular de 5 rad/s^2 durante 12 segundos . Calcular:
 - a) ¿Qué velocidad angular lleva al cabo de los 12 segundos ?
 - b) ¿Qué desplazamiento angular tuvo?
9. La hélice de un avión parte del reposo y después de 8 segundos gira a razón de $20\,000\text{ RPM}$.
 - a) ¿Qué velocidad angular alcanza al cabo de 8 s ?
 - b) ¿Cuál es su aceleración angular?

10. Un automóvil parte del reposo en una vía circular de 400 metros de radio con MUCA hasta que alcanza una rapidez de 20 m/s en un tiempo de 25 segundos. Determinar:

- a) La velocidad angular final.
- b) La velocidad angular media.
- c) La aceleración angular.

11. Una turbina de un jet se acelera de 0 a 5 000 RPM en 10 segundos. Si el radio es de 1,2 metros. Determinar:

- a) La velocidad angular final.
- b) La velocidad angular media.
- c) La aceleración angular.
- d) El desplazamiento angular.
- e) La distancia recorrida por el extremo de la turbina.

12. Un punto animado de movimiento circular cambia su velocidad angular de 150 RPM a 2 500 RPM en 1,5 minutos. Si el radio de la trayectoria es 1,8 metros. Determinar:

- a) La rapidez inicial.
- b) La velocidad angular final.
- c) La aceleración angular.
- d) El desplazamiento angular.
- e) Cuantas vueltas dio.
- f) La distancia recorrida.

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 7

TIRO HORIZONTAL

Objetivo

Comprender las características del tiro horizontal.

Fundamento teórico

Cuando un cuerpo es disparado horizontalmente con velocidad (v), esta se mantiene constante porque no hay fuerza que actúe en esta dirección. En el sentido vertical está sujeto a la aceleración de la gravedad (g) que va a producir en el cuerpo un Movimiento Uniformemente Acelerado en el sentido y , por consiguiente, el cuerpo está sometido simultáneamente a dos movimientos; en el sentido horizontal a un Movimiento Uniforme; y en el sentido vertical a un Movimiento Uniformemente Acelerado (Álvarez, M. et al. 2011).

Para encontrar el tiempo que tarda el cuerpo en caer al suelo, se debe utilizar la ecuación de la caída libre, que son:

$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$	$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
-----------------------------	---------------------------

Para determinar la velocidad horizontal (v_x) se debe tomar en cuenta que en este sentido el Movimiento es Uniforme, por consiguiente, la (v_x) estará dada por:

$v_x = \frac{d}{t}$

Materiales

- Plano acanalado de madera de 25 cm (2).
- Bola de acero de 30 mm de diámetro.

- Cinta adhesiva.
- Flexómetro metálico.
- Hoja de papel blanco (3).
- Papel carbón.
- Hilo de 1,50 m.
- Rodela metálica o tuerca.
- Pinza para sujetar el plano acanalado.
- Taco de madera con dos gradas



Procedimiento

1. Coloca un plano acanalado en un extremo de la mesa y sujétalo con la pinza, sobre el primer plano coloca el segundo como indica el gráfico, a una distancia del extremo. En el otro extremo coloca sobre la segunda grada del taco de madera.
2. Amarra en un extremo del hilo la rodela que va a servir de plomada. Tomando del hilo déjalo colgar desde el extremo del plomo de madera hasta que toque la rodela del piso. Señala cuidadosamente con un lápiz ese punto.
3. Pon la bola en el extremo del plano inclinado y déjala rodar. Observa el punto del suelo donde cae, sobre ese punto coloca la hoja de papel, fijándola con la cinta adhesiva y sobre está, coloca el papel carbón.
4. Pon nuevamente la bola en el extremo del plano inclinado y déjala rodar. Observa la marca en el papel blanco y mide la distancia x , anota en la tabla y repite dos veces más.

Tabla de datos

Impulso	Distancias			Tiempo (s)	Velocidad (cm/s)
	1	2	3		
1					
2					

Evaluación

- Encuentra la altura con la ecuación (1).
- Calcula el tiempo con la ecuación (2).
- Calcula la velocidad con la ecuación (3).
- ¿Por qué se utiliza el tiempo de caída para calcular la velocidad en x?
- ¿Cuáles son los dos movimientos en cual está sometido el cuerpo?
- ¿Qué relación hay entre la altura de la que se suelta la bola y el alcance de esta? ¿Por qué?
- ¿Porque debe hacerse el procedimiento varias veces?
- Cumpliste con el objetivo formulado para esta práctica de laboratorio.

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 8

TIRO PARABÓLICO

Objetivo

Determinar la velocidad inicial en el tiro parabólico para diferentes ángulos con respecto a la horizontal constante (v_x) y de una velocidad uniformemente variado producida por efecto de la aceleración de la gravedad.

Fundamento teórico

Al disparar un proyectil con una dirección que forme un ángulo con la horizontal, la velocidad de salida (v_x) es la resultante de una velocidad horizontal constante (v_x) y de una velocidad uniformemente variado producida por efecto de la aceleración de la gravedad. El alcance horizontal (X) y la altura máxima (h_{max}) que puede alcanzar el proyectil, esta dadas por:

$X = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta}{2}$	$h_{max} = \frac{(v_0 \cdot \sin \theta)^2}{2g}$
--	--

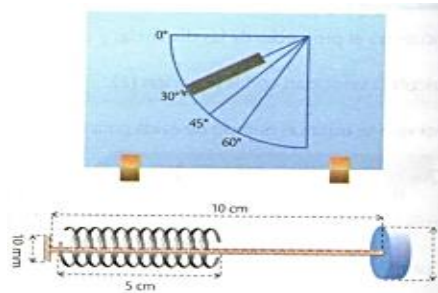
Materiales

- Tablero de madera trípex de 50 x 40 cm y un centímetro de grosor.
- Tacos de madera sólida para sostener el tablero.
- Tubo de pvc o de plástico transparente de 2 cm de diámetro y 12 de longitud.
- Varilla de cobre o aluminio de 2 mm de diámetro y 10 cm de longitud.
- Trozos de varilla latón y plástico grueso.
- Resorte espiral de 15 mm de diámetro y 5 cm de longitud, con 12 espiras.
- Velcro autoadhesivo 2 m.
- Bola de acero de 15 mm de diámetro.

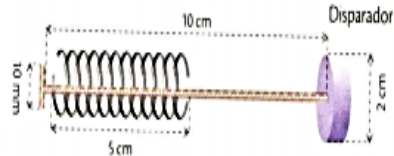
- Tarrito de pintura blanca y negra.
- Brochas pequeñas para pintar.
- Lija para pulir la superficie del tablero.
- Tarrito de cola blanca. Pega epóxica.
- Rulimán o canica de 15 mm de diámetro.
- Mesa para el tiro parabólico.
- Papel carbón.
- Flexómetro.
- Rollo de cinta adhesiva.

Procedimiento

1. Encarguen soldar la varilla y hacer el resorte en una mecánica de presión, según el gráfico adjunto. La rodela del extremo derecho que sea perfectamente enroscada a la varilla.

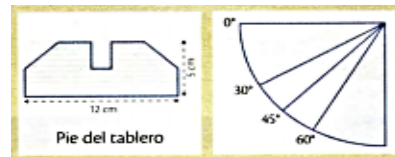


2. Hagan una rodela de plástico grueso de un diámetro igual al diámetro externo del tubo, con un orificio en el centro del grosor de la varilla.



3. Desenrosquen la rodela de la varilla, háganla pasar por la tapa plástica del tubo y luego coloquen el resorte y la rodela de la varilla. Peguen firmemente la tapa plástica en el extremo del tubo y luego pequen el velcro a lo largo del tubo.

4. Encarguen a un carpintero hacer el pie del tablero, según el gráfico adjunto. El ancho debe ser 5 cm.



5. Lijen bien el tablero y píntenlo de color blanco, darle al menos dos manos.

6. Con un compás y marcador grueso tracen un cuadrante de 25 cm de radio, como indica el gráfico. Tracen los gráficos correspondientes 90° , 60° , 45° , 30° y 0° .
7. Corten 5 tiras de velcro de 12 cm de longitud y péquenlas en los radios de 60° , 45° , 30° y 0° .
8. Corten 5 tiras de velcro de 12 cm de longitud y péguenla en los radios de 60° , 45° , 30° y 0° . La restante es para el tubo del disparador.
9. Coloquen el tablero en los tacos de madera y péquenlos con cola blanca.
10. Coloca el tablero de lanzamiento junto a un extremo de la mesa, de tal modo que la horizontal de la mesa coincida con la línea 0° del tablero.
11. Ponga el disparador para un ángulo de 30° .
12. Coloca la canica o el Rulimán en el extremo abierto del disparador. A continuación, comprime el resorte hasta el tope.
13. Suelta el disparador y observa donde cae la canica. Coloca allí el papel carbón, fijándolo con cinta adhesiva. Repite el lanzamiento.
14. Mide cuidadosamente la distancia entre la salida del disparador y el punto donde cayó la bola. Anota el valor en la tabla. Repite este lanzamiento dos veces más, anotando siempre el alcance (X).
15. Vuelve a los procedimientos 1 a 4 para ángulos de 45° y 60° . Observa la altura máxima en cada lanzamiento. (Álvarez, M. et al. 2011).

Tabla de datos

Ángulos	30°	45°	60°
Alcance máximo			
Altura máxima			

Evaluación

- Encuentra el alcance máximo, utiliza la ecuación (1).
- Calcula la altura máxima ($h_{\max}$) mediante la ecuación (2).
- Encuentra el valor de la velocidad inicial del lanzamiento para cada ángulo. Para ello, utiliza la ecuación (1).

- Compara el alcance máximo para cada ángulo y determina con cual ha sido mayor. Explica el porqué de tu respuesta.
- ¿Con que ángulo se obtiene el menor alcance? ¿Por qué?
- ¿Con que ángulo obtuviste la mayor altura máxima? ¿por qué?
- ¿Explica con tus propias palabras lo que representa un tiro parabólico?

CAPÍTULO 5.

LEYES DEL MOVIMIENTO

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo aplicar el concepto de fuerza y porque las fuerzas son vectores.
- Cómo determinar la fuerza neta sobre un objeto y lo que sucede cuando la fuerza neta es cero.
- Cómo relacionar la fuerza neta sobre un objeto y su aceleración.
- Cómo aplicar el movimiento de los cuerpos a partir de las leyes de la dinámica de newton.

5.1. Fuerzas

La Dinámica tiene por objeto estudiar el movimiento de un cuerpo, relacionándolo con las causas que lo generan. Estas causas son el resultado directo de la interacción del cuerpo analizado con otros que lo rodean. Si quieres cambiar algo de lugar, por ejemplo, una cama, tienes que empujarla. Si quieres recoger un objeto que está en el piso, tienes que cargarlo para ponerlo sobre una mesa. Si quieres que tu bicicleta camine, tienes que pedalear. Si deseas meter un gol desde media cancha, hay que patear fuerte el balón para que llegue a la portería. (Hewitt, P. 2008).



En todos los casos anteriores, y en general, siempre que desees que un cuerpo se ponga en movimiento, debes aplicarle una fuerza.

Las fuerzas son necesarias para que las cosas puedan moverse o detenerse. Por ejemplo, si quieres que se detenga un automóvil, se deben aplicar los frenos para que la fuerza de fricción entre las balatas y el tambor lo detenga; cuando un avión aterriza, el piloto echa a andar los motores al revés para que la fuerza que éstos producen lo detenga.

Una fuerza puede también causar la deformación o formación de objetos, por ejemplo, si se golpea una piedra con fuerza ésta puede perder su forma, si choca un automóvil contra otro los dos pueden deformarse. Pero las fuerzas pueden tener además de comenzar o detener un movimiento, otro efecto sobre las cosas, que es el de desviarlas, es decir, causar que un cuerpo en movimiento describa cierta trayectoria.

Por ejemplo, si un automóvil va viajando por una carretera en línea recta y es golpeado por una vaca, el auto se va de lado, desviándose de su trayectoria original. Los planetas giran alrededor del Sol en trayectorias elípticas debido a la fuerza de gravedad con la que éste los jala. Al lanzar un objeto hacia arriba de manera inclinada, la trayectoria que

describe es una parábola, debido a la fuerza de gravedad que la Tierra atrae el objeto hacia el centro.

Fuerza: es aquello capaz de cambiar el estado de movimiento de un objeto o deformarlo y sus tipos son: (Cuellar, C. 2013).

Interacción de fuerzas

De acuerdo con el modo en el que interactúan las fuerzas, ésta se puede dar de dos formas:

Fuerzas a distancia: como la fuerza gravitatoria entre cargas, debido a la interacción entre campos (gravitatorio, eléctrico, etc.) y que se producen cuando los cuerpos están separados cierta distancia unos de los otros, por ejemplo:



el peso.

Fuerzas por contacto: se produce cuando la superficie libre de los cuerpos entra en contacto directo.



Antecedentes históricos del estudio del movimiento

Para establecer las leyes del movimiento se tuvieron que realizar muchas observaciones y los científicos generaron ideas, las experimentaban y comprobaban para llegar a generalizaciones o conclusiones.

En el siglo **XVI**, Galileo Galilei concluyó que un objeto se detiene por la fuerza de fricción entre dos objetos, donde uno de ellos se opone al movimiento del otro.

Enunció el principio de la **inercia**, que dice que, en ausencia de la acción de fuerzas, un objeto en reposo continuará así, y uno en movimiento se moverá en línea recta a velocidad constante.



Un siglo después, quien culminó este trabajo aportando sus ideas y haciendo una muy buena síntesis fue el científico inglés Isaac Newton, quien estudió las leyes generales que rigen el movimiento de los objetos, observando la caída de una manzana al suelo, al establecer las relaciones entre la fuerza que provocó esta caída y la fuerza que sostiene a la Luna en su órbita alrededor de la Tierra. Plasmó sus estudios en el libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, donde estableció las tres leyes del movimiento, también conocidas como leyes de Newton, base de lo que hoy conocemos como mecánica clásica o mecánica newtoniana, así como de ley de gravitación universal.

La fuerza como un vector

Cuando una fuerza es ejercida sobre un objeto, los efectos producidos dependen de su magnitud, dirección y sentido, por lo que se considera la fuerza como una magnitud vectorial, ya que no es lo mismo si la fuerza se aplica de manera horizontal hacia la derecha que hacia la izquierda.

5.2. Leyes del movimiento de Newton

Para explicar las leyes del movimiento de Newton, debemos tener clara algunas connotaciones importantes consideradas por (Gutiérrez, 2010).

5.2.1. Primera ley de Newton (Ley de inercia)

Cuando se intenta cambiar el estado de movimiento de un objeto, éste siempre se resistirá. Si queremos mover dos objetos de masa diferente, será más fácil mover el de menor masa; por ejemplo, es más fácil mover una bicicleta pequeña que un auto grande.

Asimismo, cuando ambos objetos están en movimiento, se requiere de mayor fuerza para detener al de mayor masa que al de menor masa, ya que el objeto grande presenta mayor inercia. Con esto podemos deducir que a mayor masa de un objeto mayor será la resistencia del objeto para acelerarse. Newton postula en su primera ley, que un cuerpo no cambia

por sí solo en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, a menos que se aplique un conjunto de fuerzas sobre éste. (French, A. 1998).

“Inercia: es la resistencia que presentan los objetos a cambiar su estado de movimiento o de reposo.”

5.2.2. Segunda ley de newton (Ley de fuerza)

En su segunda ley, Newton habla de la relación entre fuerza y aceleración. Cuando una fuerza neta actúa en un cuerpo en movimiento (cuya masa puede cambiar); la fuerza modificará su estado, velocidad o dirección. Los cambios experimentados serán proporcionales a la dirección, es decir, provocan aceleración en los cuerpos.

“Fuerza: la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.”

En términos matemáticos esta ley se expresa mediante la relación:

$a = \frac{F}{m}$	$F = m.a$
-------------------	-----------

Significado:

F = Fuerza, se mide en Newtons (**N**)

m = masa, se mide en kilogramo (**kg**)

a = aceleración, se mide (**m/s²**)

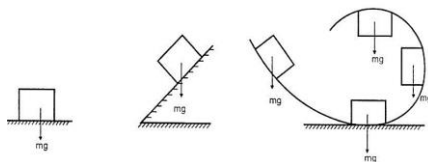
1 N = kg.m/s²

Masa y peso

Masa: la masa (**m**) caracteriza las propiedades inerciales de un cuerpo; es lo que mantiene la vajilla en la mesa cuando sacamos el mantel de un tirón. A mayor masa, se necesitará más fuerza para causar una aceleración dada; esto se refleja en la segunda ley de Newton

Peso: el peso (**w**) es una fuerza ejercida sobre un cuerpo por la atracción de la tierra. La masa y el peso están relacionados: los cuerpos con masa

grande tienen peso grande. Es una magnitud vectorial, ya que la dirección está orientada hacia el cuerpo más grande. Se representa con la letra (**w**).



La **aceleración de la gravedad (*g*)**, no es la misma en los lugares del mundo; hay pequeñas variaciones de un lugar a otro, por lo cual el peso de un cuerpo varía de acuerdo con el lugar. Por ejemplo, en *Ecuador* la (***g* = 9,77 m/s²**), un cuerpo en la Luna 1/6 de su peso en la tierra.

Cuando un cuerpo cae libremente hacia la superficie de la Tierra, este se acelera debido a la gravedad que la Tierra que ejerce sobre él.

La fórmula para calcular el peso de un objeto se debe a la segunda Ley de Newton. (French, A. 1998).

donde *g* = **aceleración debida a la gravedad (9,81 m/s²)**, en el **sistema internacional (SI)**

$$w = m.g$$

Significado

w = peso, se mide en (**N**)

m = masa, se mide en (**kg**)

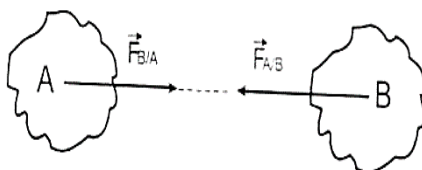
g = aceleración de la gravedad (**m/s²**)

5.2.3. Tercera ley de newton (Acción y reacción)

La tercera ley expone que cuando un cuerpo ejerce fuerza sobre otro, el segundo ejerce siempre sobre el primero una fuerza de igual magnitud, pero de sentido contrario, por eso a cada fuerza de acción le corresponde una fuerza de reacción. (Gutiérrez, 2010). Por ejemplo, la acción que produce la fuerza que aplicamos cuando pateamos una pelota, ocasiona una fuerza de reacción que se manifiesta sobre nuestro pie. Un imán atrae unos clavos con la misma fuerza con las que éstos atraen al imán.

“Acción y reacción: a toda fuerza de acción le corresponde otra reacción de igual magnitud, pero de sentido contrario.”

Por ejemplo, si los cuerpos A y B de la figura interactúan, la fuerza que el cuerpo A ejerce sobre el cuerpo B ($\vec{F}_{A/B}$) es igual y opuesta a la que el cuerpo B ejerce sobre el cuerpo A ($\vec{F}_{B/A}$).



Por ejemplo, la acción que produce la fuerza que aplicamos cuando pateamos una pelota, ocasiona una fuerza de reacción que se manifiesta sobre nuestro pie.

Ejemplo 1.

Un niño jala una cuerda atada a un trineo con una fuerza de 60 N. La cuerda hace un ángulo de 40° con el suelo.

- Calcule el valor real del tirón que tiende a mover el trineo por el suelo.
- Calcule la fuerza que tiende a elevar el trineo verticalmente.

Datos

$$F = 60 \text{ N}$$

$$\theta = 40^\circ$$

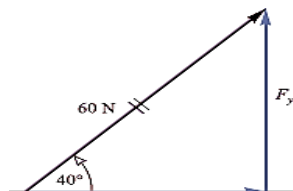
Solución

$$\text{a) } F_x = 60 \text{ N } \cos 40^\circ$$

$$F_x = 45,96 \text{ N}$$

$$\text{b) } F_y = 60 \text{ N } \sin 40^\circ$$

$$F_y = 38,57 \text{ N}$$



Ejemplo 2.

A un objeto de 20 kg que se mueve libremente se le aplica una fuerza resultante de 45 N en la dirección $-x$. Calcule la aceleración del objeto.

Datos

$$m = 20 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_x = -45 \text{ N}$$

$$a_x = ?$$

Solución

$$a_x = \frac{\Sigma F_x}{m}$$

$$a_x = \frac{-45 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = \frac{-45 \text{ kg.m/s}^2}{20 \text{ kg}}$$

$$a_x = -2,25 \text{ m/s}^2$$

Como la fuerza resultante actúa en la dirección -x su aceleración está en la misma dirección.

Ejemplo 3.

Un móvil de 1500 kg que va por una carretera recta se le aplica una fuerza constante de 3000 N durante 10 s, en la misma dirección del movimiento, luego de lo cual adquiere una velocidad de 180 km/h.

Determinar:

- La aceleración del móvil
- Que velocidad tenía el móvil antes de ser aplicada la fuerza.

Datos

$$m = 1500 \text{ kg}$$

$$F = 3000 \text{ N}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$v_f = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$$

Solución

$$\text{a) } a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{3000 \text{ N}}{1500 \text{ kg}}$$

$$a = \frac{3000 \text{ kg.m/s}^2}{1500 \text{ kg}}$$

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } v_o = v_f - a.t$$

$$v_o = 50 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ s}$$

$$v_o = 50 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}$$

$$v_o = 30 \text{ m/s}$$

Ejemplo 4.

Un automóvil de 1 000 kg que va por una carretera recta se le acciona con una fuerza constante de 490 N durante 8 s, llegando a tener una velocidad de 40 m/s. Determinar:

- La aceleración del automóvil
- Que velocidad tenía el automóvil antes de empezar acelerar.
- Qué velocidad lleva cuando ha recorrido 150 m

Datos

$$m = 1\,000 \text{ kg}$$

$$F = 490 \text{ N}$$

$$t = 8 \text{ s}$$

$$v_f = 40 \text{ m/s}$$

Solución

$$\text{a) } a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{490 \text{ N}}{1\,000 \text{ kg}}$$

$$a = \frac{490 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1\,000 \text{ kg}}$$

$$a = 0,49 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } v_o = v_f - a \cdot t$$

$$v_o = 40 \text{ m/s} - 0,49 \text{ m/s}^2 (8 \text{ s})$$

$$v_o = 40 \text{ m/s} - 3,92 \text{ m/s}$$

$$v_o = 36,08 \text{ m/s}$$

$$\text{c) } v_f^2 = v_o^2 + 2ad$$

$$v_f^2 = (36,08 \text{ m/s})^2 + 2(0,49 \text{ m/s}^2) (150 \text{ m})$$

$$v_f^2 = 1301,77 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 147 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f^2 = 1301,77 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 147 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = \sqrt{1448,77 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$v_f = 38,06 \text{ m/s}$$

Ejemplo 5.

Un automóvil de 1200 kg cambia su velocidad en forma constante de $(-12,61\vec{i} - 12,79\vec{j})$ km/h a $(-70\vec{i} - 71\vec{j})$ km/h en un minuto. Determinar:

a) La aceleración producida

b) La fuerza ejercida por el motor

Datos

$$\vec{v}_o = (-12,61\vec{i} - 12,79\vec{j}) \text{ km/h} = (-3,51\vec{i} - 3,55\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_f = (-70\vec{i} - 71\vec{j}) \text{ km/h} = (-19,44\vec{i} - 19,72\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$t = 1 \text{ min.} = 60 \text{ s}$$

Solución

$$\text{a) } \vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t}$$

$$\vec{a} = \frac{(-19,44\vec{i} - 19,72\vec{j}) \text{ m/s} - (-3,51\vec{i} - 3,55\vec{j}) \text{ m/s}}{60 \text{ s}}$$

$$\vec{a} = \frac{(-15,94\vec{i} - 16,17\vec{j}) \text{ m/s}}{60 \text{ s}}$$

$$\vec{a} = (-0,27\vec{i} - 0,27\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

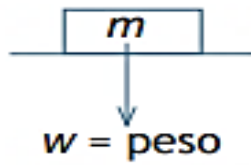
$$\text{b) } \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = 1200 \text{ kg } (-0,27\vec{i} - 0,27\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{F} = (-324\vec{i} - 324\vec{j}) \text{ N}$$

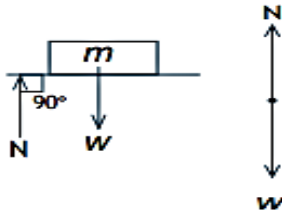
5.3. Fuerza normal

Si se considera un objeto en reposo sobre una superficie horizontal, sabemos que el centro de la Tierra ejerce sobre él la fuerza gravitacional, a pesar de no tener aceleración ($\vec{a} = \vec{0}$). De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza neta que actúa sobre el objeto es cero, por lo tanto, debe existir una fuerza que se oponga a la fuerza gravitacional y que actúe sobre el objeto para impedir que éste se hunda. (French, A. 1998).



Esta fuerza producida por la superficie, y actúa de manera perpendicular a la superficie de contacto y se llama *fuerza normal* (**N**).

Su unidad en el (**SI**) es el *Newton* ($\mathbf{N = kg.m/s^2}$) y en el CGS (**Dina** = $\mathbf{g.cm/s^2}$)



Por la segunda ley de Newton tenemos:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N - W = 0$$

$$N = W$$

$W = m.g$	$N = m.g$
-----------	-----------

Ejemplo 6.

Determine el peso de una persona de 60 kg.

Datos

$$W = ?$$

$$m = 60 \text{ kg}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Solución

$$W = m.g$$

$$W = (60 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2)$$

$$W = 588 \text{ N}$$

Ejemplo 7.

Determina la magnitud de la superficie normal de un objeto de 30 kg que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal.

Datos

$$N = ?$$

$$m = 30 \text{ kg}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Solución

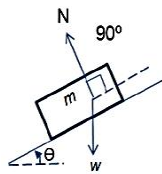
$$N = mg$$

$$N = (30 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2)$$

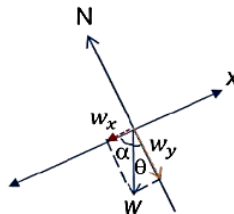
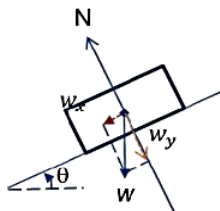
$$N = 294 \text{ N}$$

5.4. Plano inclinado

Si un objeto descansa sobre un plano inclinado, actúan sobre él la fuerza gravitacional (el peso) y la fuerza normal, como se puede observar en el dibujo.



Si establecemos un sistema de coordenadas donde el eje x es paralelo al plano inclinado, y el eje y perpendicular al mismo, se puede descomponer el vector peso en sus componentes rectangulares w_x y w_y como se puede observar. (Young, H. et al. 2009).



Por geometría, tenemos que: $\cos\theta = \frac{w_y}{w}$, despejando, $w_y = w.\cos\theta$

Como sabemos, $w = m.g$, por tanto, $w_y = m.g.\cos\theta$. Aplicando el mismo proceso, $\sin\theta = \frac{w_x}{w}$, despejando, $w_x = w.\sin\theta$, por lo que tenemos $w_x = m.g.\sin\theta$

Para la fuerza normal: $\Sigma F_y = m.a_y$. Como no hay movimiento, $a_y = 0$; $N - w_y = 0$, pasando al segundo miembro el peso en y $N = w_y$
Por lo que resulta $N = m.g.\cos\theta$

5.5. Fuerza de rozamiento

Se genera cuando dos cuerpos están en contacto y el uno tiende a moverse o se mueve con relación a otro y su sentido sobre cada cuerpo es el opuesto al movimiento relativo. Si se golpea una bola de billar sobre la mesa, su velocidad disminuye hasta que se detiene. Esta desaceleración, de acuerdo con la *primera ley de Newton*, indica la existencia de una fuerza que se opone al movimiento, y recibe el nombre de fricción o rozamiento.

Fricción: la fricción se presenta al caminar, cuando se maneja un automóvil, al usar ropa, cuando chocan dos objetos, la fricción de las llantas sobre el pavimento, un clavo se mantiene unido al concreto o a la madera debido a la fricción.

Como te habrás dado cuenta, estas superficies son rugosas, lo que ayuda a que exista mucha fricción; pero *¿qué pasa cuando la superficie está muy lisa o presenta poca fricción?* Al deslizarse sobre el hielo, una persona lo puede hacer muy fácil, también sería muy peligroso caminar sobre una superficie llena de aceite. *Los automóviles y las maquinarias en general utilizan lubricantes para reducir el rozamiento entre sus partes móviles*, con el objetivo de disminuir el desgaste ocasionado por la fricción y también para reducir el consumo de energía. (Pérez, H. 2013).

Existen dos tipos de fricciones:

Fricción estática: se presenta cuando la fricción impide que un objeto se ponga en movimiento por la acción de una fuerza

Fricción cinética: se presenta cuando la fricción opone a un movimiento en acción.



Leyes de la fricción estática y cinética:

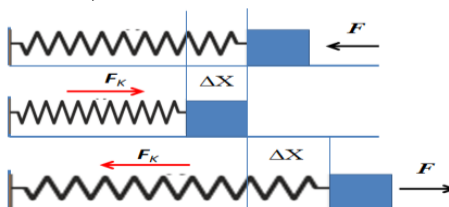
1. Para superficies paralelas, La fuerza de **fricción estática (f_e)** actúa en la dirección de la fuerza aplicada, en sentido contrario.
2. La magnitud de la **fuerza de fricción estática (f_e)** es directamente proporcional a la magnitud de la **fuerza normal (N)**, y se calcula multiplicando el **coeficiente de fricción estático (μ_e)** por la fuerza normal **$f_e = \mu_e N$**
3. La magnitud de la fuerza de fricción estática es cero cuando no se aplica una fuerza externa que ponga el objeto en movimiento.
4. La magnitud de la fuerza de fricción estática alcanza su punto máximo cuando un objeto está a punto de iniciar su movimiento mediante la acción de una fuerza paralela a las superficies que están en contacto.
5. La **fuerza de fricción cinética (f_c)** es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza normal, y se calcula multiplicando el coeficiente de **fricción cinético (μ_c)** por la normal **$f_c = \mu_c N$** . Lo que significa que si un cuerpo descansa sobre una superficie horizontal y es aplicada una aceleración se producen dos fuerzas, una fuerza horizontal y otra con sentido opuesto que es una fuerza cinética, es decir. **$F - f_c = m.a$**

$$\mu_c = \frac{F - m.a}{N}$$

6. Se pueden presentar 3 casos cuando un objeto se desliza sobre una superficie y se le aplica una fuerza (F) paralela.
 - a) Si **$F = f_c$** el objeto se desliza a **velocidad constante**
 - b) Si **$F > f_c$** el objeto **se acelera**
 - c) Si **$F < f_c$** el objeto **se desacelera** hasta detenerse por completo

7. Si se deja de aplicar la fuerza, la fuerza de fricción cinética desacelera el objeto hasta llevarlo al reposo.
8. El coeficiente de *fricción estática es mayor que el coeficiente de fricción cinética*, es decir, $\mu_e > \mu_c$

Fuerza elástica: un cuerpo se denomina elástico cuando bajo la acción de fuerzas, dentro de ciertos límites se deforma, pero al retirar el agente de deformación, el cuerpo regresa a sus condiciones iniciales de forma y tamaño. (Pérez, H. 2013).



La fuerza elástica (**Ley de Hooke**) siempre estará dirigida hacia la posición en que el resorte no está deformado, y su valor depende de la variación de la longitud del resorte con relación a su longitud natural, matemáticamente se expresa:

$$F_e = -k \cdot x$$

Significado

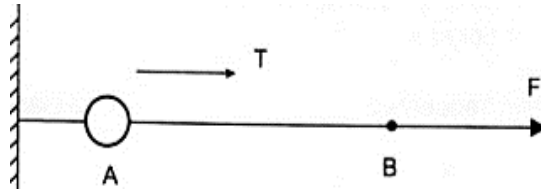
F_e = Fuerza elástica (**N**)

k = Constante del resorte (**N/m**)

x = Deformación ($L_F - L_0$) (**m**)

El signo menos indica que la fuerza de recuperación tiene sentido opuesto al de la deformación.

Tensión de una cuerda: la cuerda es un elemento flexible que sirve para transmitir la acción de una fuerza aplicada. En condiciones ideales la fuerza transmitida es la misma en cualquier sección de la cuerda, o sea que, la fuerza no se pierde. (Serway, A.; Jewett, J. 2005).



La aplicación de una fuerza (**F**) al extremo B de la cuerda, determina que en el punto A la cuerda transmite una fuerza de tensión a la pared.

Ejemplo 8.

Una señora desea mover un mueble hacia la izquierda. El mueble pesa 40 kg y el coeficiente de fricción cinética entre ella y el suelo es 0,35. Calcule la fuerza que debe emplear la señora para comenzar a mover el mueble.

Datos

$$m = 40 \text{ kg}$$

$$\mu_c = 0,35$$

$$f_c = ?$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Solución

$$N = mg$$

$$N = 40 \text{ kg} (9,8 \text{ m/s}^2)$$

$$N = 392 \text{ N}$$

$$f_c = \mu_c N$$

$$f_c = 0,35 (392 \text{ N})$$

$$f_c = 137,2 \text{ N}$$

Ejemplo 9.

Una caja de 70 kg que se desliza sobre una superficie horizontal que es jalada por un hombre con una fuerza de 140 N a 40° con la horizontal. Calcula la aceleración del objeto si el coeficiente de fricción cinética es de 0,15

Datos

$$m = 70 \text{ kg}$$

$$F = 140 \text{ N}$$

$$\theta = 40^\circ$$

$$\mu_c = 0,15$$

$$a = ?$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Solución

Para el eje de y:

$$N + F_y - W = 0$$

$$N = W - F_y$$

$$N = mg - F \cdot \sin \theta$$

$$N = (70 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2) - (140 \text{ N}) (\sin 40^\circ)$$

$$N = 596 \text{ N}$$

Para el eje x:

$$F_x - f_c = m \cdot a$$

$$a = \frac{F_x - f_c}{m} = \frac{F \cdot \cos 40^\circ - \mu_c N}{m}$$

$$a = \frac{(140 \text{ N})(0,766044) - (0,15)(596 \text{ N})}{70 \text{ kg}}$$

$$a = 0,25 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 10.

Una fuerza horizontal de 1500 N produce una aceleración de $2,25 \text{ m/s}^2$ en un cuerpo de 300 kg que descansa sobre una superficie horizontal. Determinar.

- La fuerza normal ejercida por la superficie sobre el cuerpo
- El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

Solución

$$a) \Sigma F_y = 0$$

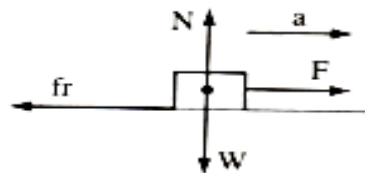
$$N - w = 0$$

$$N = w$$

$$N = m \cdot g$$

$$N = 300 \text{ kg} (9,8 \text{ m/s}^2)$$

$$N = 2940 \text{ N}$$



b) $\Sigma F_y = m \cdot a$

$$F - f_r = m \cdot a$$

$$F - \mu \cdot N = m \cdot a$$

$$\mu \cdot N = F - m \cdot a$$

$$\mu = \frac{F - m \cdot a}{N}$$

$$\mu = \frac{1\,500\text{ N} - 300\text{ kg} (2,25\text{ m/s}^2)}{2\,940\text{ N}}$$

$$\mu = \frac{1\,500\text{ N} - 675\text{ N}}{2\,940\text{ N}}$$

$$\mu = \frac{825\text{ N}}{2\,940\text{ N}}$$

$$\mu = 0,28$$

Ejemplo 11.

Un cuerpo de 5 kg parte del reposo y adquiere una velocidad de 40 km/h en una distancia horizontal de 25 m. Si su $\mu = 0,22$. Determinar:

a) La aceleración producida.

b) El valor de la fuerza aplicada.

Solución

a) $\Sigma F_y = 0$

$$N - w = 0$$

$$N = w$$

$$N = m \cdot g$$

$$N = 5\text{ kg} (9,8\text{ m/s}^2)$$

$$N = 49\text{ N}$$

$$a = \frac{v_f^2 - v_o^2}{2 \cdot d} = \frac{123,43\text{ m}^2/\text{s}^2}{2 (25\text{ m})}$$

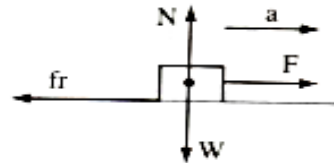
$$a = \frac{123,43\text{ m}^2/\text{s}^2}{50\text{ m}}$$

$$a = 2,47\text{ m/s}^2$$

b) $f_r = \mu \cdot N$

$$f_r = 0,22 (49\text{ N})$$

$$f_r = 10,78\text{ N}$$



$$F - fr = m.a$$

$$F = m.a + fr$$

$$F = 5 \text{ kg } (2,47 \text{ m/s}^2) + 10,78 \text{ N}$$

$$F = 12,35 \text{ N} + 10,78 \text{ N}$$

$$F = 23,13 \text{ N}$$

Ejemplo 12.

En la figura, si el cuerpo es de 8 kg y $\mu_c = 0,16$. Determinar:



¿Qué valor debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con velocidad constante?

¿Qué valor debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con una aceleración de 3 m/s^2 ?

Solución

a) $\Sigma F_y = 0$

$$N + F_y - W = 0$$

$$N = W - F_y$$

$$N = m.g - F.\text{sen } 25^\circ$$

$$N = 8 \text{ kg } (9,8 \text{ m/s}^2) - F(0,422618)$$

$$N = 78,4 \text{ N} - 0,422618 F$$

$$f_r = \mu.N$$

$$f_r = 0,16 (78,4 \text{ N} - 0,422618 F)$$

$$f_r = 12,54 \text{ N} - 0,067618 F$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_x - f_r = 0$$

$$F.\cos 25^\circ - 12,54 \text{ N} + 0,067618 F = 0$$

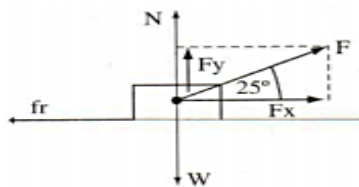
$$0,906308 F - 12,54 \text{ N} + 0,067618 F = 0$$

$$0,973925 F - 12,54 \text{ N} = 0$$

$$F = 12,88 \text{ N}$$

b) $\Sigma F_x = m.a$

$$F_x - f_r = m.a$$



$$F \cdot \cos 25^\circ - 12,54 \text{ N} + 0,067618 F = 8 \text{ kg} (3 \text{ m/s}^2)$$

$$0,906308 F - 12,54 \text{ N} + 0,067618 F = 24 \text{ N}$$

$$0,973925 F = 24 \text{ N} + 12,54 \text{ N}$$

$$0,973925 F = 36,54 \text{ N}$$

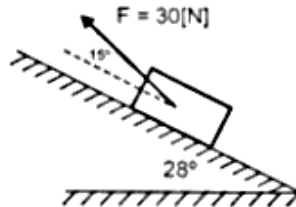
$$\mathbf{F = 37,52 \text{ N}}$$

Ejemplo 13.

Un cuerpo de 6 kg es empujado hacia arriba de un plano inclinado liso mediante una fuerza de 30 [N] como indica la figura. Determinar.

a) La fuerza que ejerce el plano sobre el cuerpo.

b) La aceleración del bloque.



Solución

a) $W_x = m \cdot g \cdot \sin 28^\circ = 6 \text{ kg} (9,8 \text{ m/s}^2) (0,469471) = \mathbf{27,60 \text{ N}}$

$W_y = m \cdot g \cdot \cos 28^\circ = 6 \text{ kg} (9,8 \text{ m/s}^2) (0,882948) = \mathbf{51,92 \text{ N}}$

$F_x = F \cdot \cos 15^\circ = 30 \text{ N} (0,965925) = \mathbf{28,98 \text{ N}}$

$F_y = F \cdot \sin 15^\circ = 30 \text{ N} (0,258819) = \mathbf{7,76 \text{ N}}$

$\Sigma F_y = 0$

$N + F_y - W_y = 0$

$N = W_y - F_y$

$N = 51,92 \text{ N} - 7,76 \text{ N}$

$\mathbf{N = 44,16 \text{ N}}$

b) $\Sigma F_x = m \cdot a$

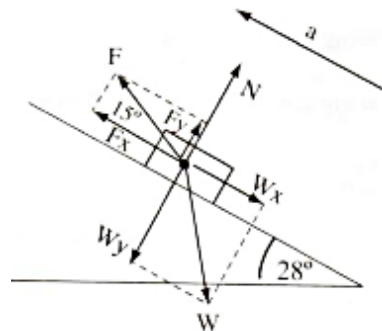
$F_x - W_x = m \cdot a$

$28,98 \text{ N} - 27,60 \text{ N} = 6 \text{ kg} \cdot a$

$1,38 \text{ N} = 6 \text{ kg} \cdot a$

$$a = \frac{1,38 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{6 \text{ kg}}$$

$\mathbf{a = 0,23 \text{ m/s}^2}$

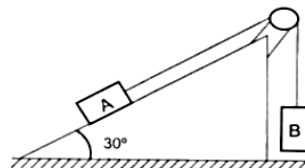


Ejemplo 14.

En la figura los bloques A y B son de 3 y 6 kg respectivamente. Si el plano inclinado es liso.

Determinar:

- La aceleración de cada bloque.
- En qué sentido se mueve cada uno de los bloques.
- La tensión de la cuerda.
- La velocidad del bloque B a los 3 s de dejarlo en libertad.



Solución

a) Bloque A

$$(W_x)_a = m_a \cdot g \cdot \sin 30^\circ$$

$$(W_x)_a = 3 \text{ kg}(9,8 \text{ m/s}^2) (0,5) = 14,7 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = m \cdot a$$

$$T - (W_x)_a = m_a \cdot a$$

$$T - 14,7 \text{ N} = 3 \text{ kg} \cdot a \quad (1)$$

Bloque B

$$\Sigma F_y = m \cdot a$$

$$W_b - T = m_b \cdot a$$

$$W_b - T = 6 \text{ kg} \cdot a \quad (2)$$

$$1 + 2$$

$$T - 14,7 \text{ N} = 3 \text{ kg} \cdot a$$

$$W_b - T = 6 \text{ kg} \cdot a$$

$$W_b - 14,7 \text{ N} = 9 \text{ kg} \cdot a$$

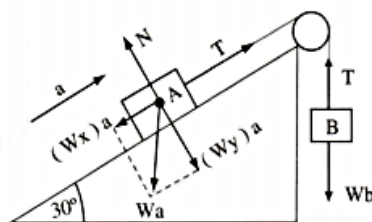
$$m_b \cdot g - 14,7 \text{ N} = 9 \text{ kg} \cdot a$$

$$6 \text{ kg} (9,8 \text{ m/s}^2) - 14,7 \text{ N} = 9 \text{ kg} \cdot a$$

$$58,8 \text{ N} - 14,7 \text{ N} = 9 \text{ kg} \cdot a$$

$$44,1 \text{ N} = 9 \text{ kg} \cdot a$$

$$a = 4,9 \text{ m/s}^2$$



b) El bloque A sube por el plano inclinado y el bloque B baja.

$$c) T - 14,7 \text{ N} = 3 \text{ kg} \cdot a$$

$$T - 14,7 \text{ N} = 3 \text{ kg} (4,9 \text{ m/s}^2)$$

$$T - 14,7 \text{ N} = 14,7 \text{ N}$$

$$T = 14,7 \text{ N} + 14,7 \text{ N} = 29,4 \text{ N}$$

$$d) v_f = v_0 + a \cdot t$$

$$v_f = (4,9 \text{ m/s}^2) (3 \text{ s}) = 14,7 \text{ m/s}$$

Ejercicio 12

1. Determina la fuerza que se necesita aplicar a un camión de 2800 kg para que éste se acelere $6,5 \text{ m/s}^2$.
2. La fuerza que actúa sobre un cuerpo de 70 kg, es de 173 N ¿Cuál es el valor de la aceleración que posee este cuerpo?
3. ¿Cuál es la masa de un cuerpo si al aplicarle una fuerza de 750 N adquiere una aceleración de $9,3 \text{ m/s}^2$?
4. ¿Cuál es el peso de una persona de 78 kg?
5. Un cuerpo de 220 kg adquiere una velocidad de 120 km/h en 12 segundos, cuando se le comunica una fuerza constante de 95 N. Determinar:
 - a) La aceleración producida.
 - b) Qué velocidad llevaba al empezar a acelerar.
6. Un automóvil de 1500 kg cambia su velocidad en forma constante de $(-3,6\vec{i} - 3,8\vec{j}) \text{ m/s}$ a $(-19\vec{i} - 21\vec{j}) \text{ m/s}$ en un minuto. Determinar:
 - a) La aceleración producida.
 - b) La fuerza ejercida por el motor.
7. Determina el peso de un joven de 55 kg.
8. Encuentre el peso de un cuerpo, si su masa en la Tierra es 3 kg.
9. Determina la fuerza normal de un objeto de 25 kg que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal.
10. Una empleada doméstica desea mover un mueble hacia la izquierda. El mueble pesa 35 kg y el coeficiente de fricción cinética entre ella y el suelo es 0,36. Calcule la fuerza que debe emplear la empleada para comenzar a mover el mueble.
11. Una caja de 60 kg se desliza sobre una superficie horizontal, es jalada por un hombre con una fuerza de 150 N formando un ángulo de 50° con la horizontal. Calcula la aceleración del objeto si el coeficiente de fricción cinética es de 0,16.
12. Una fuerza horizontal de 1568 N produce una aceleración de $2,44 \text{ m/s}^2$ en un cuerpo de 400 kg que descansa sobre una superficie horizontal. Determinar:

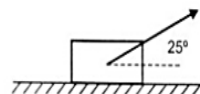
a) La fuerza normal ejercida por la superficie sobre el cuerpo.

b) El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

13. En la figura, si el cuerpo es de 10 kg y $\mu_c = 0,12$. Determinar:

¿Qué valor debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con velocidad constante?

¿Qué valor debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con una aceleración de 4 m/s^2 ?

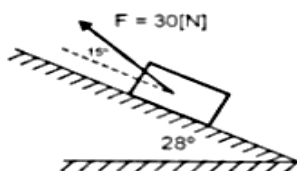


14. Un cuerpo de 6 kg es empujado hacia arriba

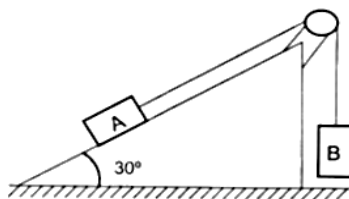
de un plano inclinado liso mediante una fuerza de 30 [N] como indica la figura. Determinar.

a) La fuerza que ejerce el plano sobre el cuerpo.

b) La aceleración del bloque.



15. En la figura los bloques A y B son de 4 y 8 kg respectivamente. Si el plano inclinado es liso. Determinar:



a) La aceleración de cada bloque.

b) En qué sentido se mueve cada uno de los bloques. R A hacia arriba y B hacia abajo

c) La tensión de la cuerda.

d) La velocidad del bloque B a los 4 s de dejarlo en libertad.

5.6. Leyes de Kepler

Las tres leyes de Kepler describen el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol. Las leyes de Kepler fueron el fruto de la colaboración con el gran astrónomo observador Tycho Brahe, quien había confeccionado las tablas astronómicas más precisas de la época. Kepler no comprendió el origen de sus leyes que tan bien describían tanto el movimiento de los planetas como el de otros cuerpos astronómicos como el sistema Tierra-Luna.



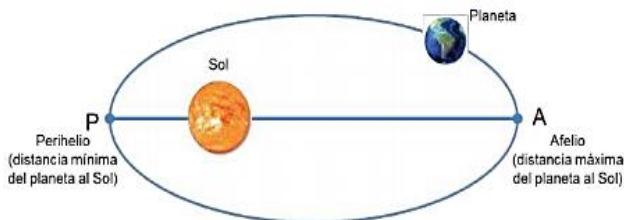
Newton sería quien extraería todas las consecuencias de las leyes de Kepler, permitiéndole así enunciar la Ley de la Gravitación Universal.

Kepler descubrió que las trayectorias que los planetas describen alrededor del Sol eran elípticas, basándose en lo descrito por Apolonio de Pérgamo, quien desarrolló estudios sobre la elipse. Además, demostró que los planetas tienen una mayor rapidez cuando se encuentran más cercanos al Sol que cuando están más lejanos.

Kepler formuló una relación matemática entre el periodo de un planeta y la distancia promedio que tenían respecto al Sol. (Pérez, H. 2013).

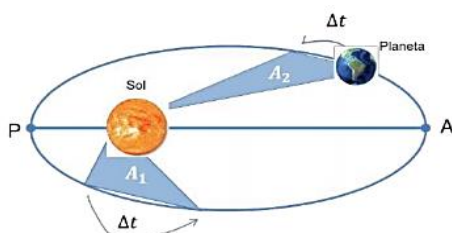
Primera ley de Kepler

Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas, situando al Sol en uno de sus focos. Los focos de una elipse son los puntos que cumplen la premisa de que la suma de sus distancias a cualquier punto de la elipse es siempre la misma.



Segunda ley de Kepler

La línea imaginaria que une cualquiera de los planetas con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, cuando el planeta está en el afelio, su velocidad es menor que cuando está en el perihelio. Los planetas describen órbitas estables y planas en el mismo sentido, y se mueven bajo la acción de fuerzas gravitatorias.



Tercera ley de Kepler

El cuadrado del periodo de cualquier planeta tiene una variación directamente proporcional con el cubo del radio de su órbita, es decir, con el cubo de la distancia promedio que existe desde un planeta hasta el Sol. (Pérez, H. 2013).

Se expresa matemáticamente con la fórmula:

$$T^2 = k \cdot r^3$$

Donde (**k**) es una constante de proporcionalidad, que tiene el mismo valor para todos los planetas.

5.7. Ley de la gravitación universal

La fuerza de gravedad es una fuerza que se presenta entre dos cuerpos debido a su masa. La ley de la gravitación universal habla de que toda partícula en el universo atrae a otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La constante de la

gravitación universal en el sistema internacional (**SI**) es $6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ y en (**CGS**) es $6,67 \times 10^{-8} \text{ dina.cm}^2/\text{gr}^2$ (Gutiérrez, 2010).

La expresión matemática de la ley de gravitación universal es:

$$F = G \frac{m_1.m_2}{r^2}$$

F = Fuerza de atracción gravitacional (**N**)

G = Constante de la gravitación universal ($6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$)

m_1 = Masa del cuerpo 1 (**kg**)

m_2 = Masa del cuerpo 2 (**kg**)

r = Distancia o separación de los 2 cuerpos (**m**)

Fuerza centrípeta y centrífuga: *siempre que una masa describe una trayectoria curva, se generan dos fuerzas, una fuerza hacia el centro que llamamos centrípeta, y otra hacia afuera a la que llamamos centrífuga.*

Newton publicó en su Ley de Gravitación Universal que la acción gravitatoria está en función de la masa de los objetos y la distancia entre ellos, a mayor masa de un objeto mayor la fuerza de atracción con los objetos; la fuerza gravitatoria será mayor a medida que disminuya la distancia entre ellos. (Pérez, H. 2013).

Con estas consideraciones, fue posible deducir la tercera ley de Kepler, aplicable a cualquier sistema donde hay un objeto central, otros objetos orbitando, con una constante que depende de la masa del objeto central, la constante de gravitación universal y el valor de Pi (π). Esta deducción ha sido relevante para el campo de la Astronomía para determinar por ejemplo la masa de los astros, la masa del sol, su distancia respecto a los planetas, el periodo del sol, etc.

Ejemplo 1.

Determina la fuerza gravitacional entre dos personas de 65 kg y 85 kg respectivamente, si se encuentran separados 2 m.

Datos

$$m_1 = 65 \text{ kg}$$

$$m_2 = 85 \text{ kg}$$

$$r = 2 \text{ m}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$$

Solución

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$F = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2 \frac{(65 \text{ kg})(85 \text{ kg})}{(2 \text{ m})^2}$$

$$F = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2 \frac{5\,525 \cancel{\text{kg}^2}}{4 \cancel{\text{m}^2}}$$

$$F = 9,21 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Ejemplo 2.

Un cuerpo de 30 kg se encuentra a 6 m de distancia de otro cuerpo, y entre ambos existe una fuerza de atracción de $70 \times 10^{-11} \text{ N}$. Calcula la masa del otro cuerpo.

Datos

$$m_1 = 30 \text{ kg}$$

$$m_2 = ?$$

$$r = 6 \text{ m}$$

$$F = 70 \times 10^{-11} \text{ N}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$$

Solución

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$m_2 = \frac{F \cdot r^2}{G \cdot m_1}$$

$$m_2 = \frac{(70 \times 10^{-11} \text{ N})(6 \text{ m})^2}{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2)(30 \text{ kg})}$$

$$m_2 = \frac{2\,520 \times 10^{-11} \cancel{\text{N.m}^2}}{(200,1 \times 10^{-11} \cancel{\text{N.m}^2}/\text{kg})}$$

$$m_2 = 12,59 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.

Encuentra la distancia de separación un cuerpo de 4 kg y otro de 10 kg si entre ambas existe una fuerza de atracción de 8×10^{-10} N.

Datos

$$m_1 = 4 \text{ kg}$$

$$m_2 = 10 \text{ kg}$$

$$r = ?$$

$$F = 8 \times 10^{-10} \text{ N}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$$

Solución

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2)(4 \text{ kg})(10 \text{ kg})}{8 \times 10^{-10} \text{ N}}}$$

$$r = \sqrt{3,34 \text{ m}^2}$$

$$\mathbf{r = 1,83 \text{ m}}$$

Ejercicio 13

1. Determina la fuerza gravitacional entre dos objetos de 63 kg y 82 kg respectivamente, si se encuentran separados 2 m.
2. Un cuerpo de 20 kg se encuentra a 5 m de distancia de otro cuerpo, y entre ambos existe una fuerza de atracción de 60×10^{-11} N. Calcula la masa del otro cuerpo.
3. Encuentra la distancia que separa un cuerpo de 3 kg y otro de 8 kg si entre ambas existe una fuerza de atracción de 9×10^{-10} N.
4. ¿Qué distancia debe haber entre un cuerpo de 500 gramos y otro de 300 gramos para que se atraigan con una fuerza de 2×10^{-5} dinas?
5. Calcular la masa de una silla si la magnitud de la fuerza gravitacional con que se atrae con una mesa de 30 kg es de 50×10^{-11} N y la distancia a la que se encuentran uno del otro es de 5 metros.
6. Determinar la fuerza gravitacional que ejercerá la Tierra sobre un cuerpo cuya masa es de 2 kg al estar colocado en un punto en el centro donde el radio terrestre es de $6,336 \times 10^6$ m. La masa de la Tierra es de $5,9 \times 10^{24}$ kg.
7. ¿A qué distancia se encuentran dos cuerpos de masas 6×10^{-2} kg y 7×10^{-3} kg, si la magnitud de la fuerza con que se atraen es de 9×10^{-9} N?
8. Calcular la magnitud de la fuerza gravitacional con la que se atraen dos personas, si una de ellas tiene una masa de 100 kg y otra de 80 kg, si la distancia que hay entre ambos es de 1,2 metros.
9. Calcular la masa de un perro si la magnitud de la fuerza gravitacional con que se atrae un gato de 5 kg es de 40×10^{-11} N y la distancia a la que se encuentran uno del otro es de 3 metros.
10. ¿A qué distancia se encuentran dos masas de 4×10^{-2} kg y 6×10^{-3} kg, si la magnitud de la fuerza con la que se atraen es de 7×10^{-9} N?

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 9

SEGUNDA LEY DE NEWTON

Objetivos

Determinar la relación que hay entre fuerza y aceleración.

Encontrar la relación entre masa y aceleración.

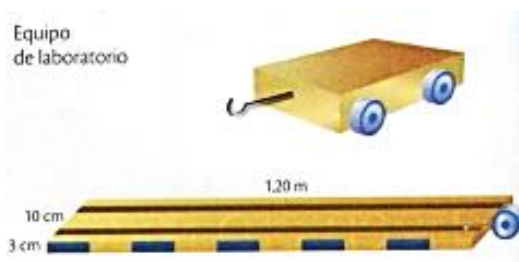
Fundamento teórico

Al estudiar las leyes de Newton encontramos que la segunda ley, llamada también ley de fuerza, se sintetiza en la ecuación $F = m \cdot a$ que significa que la fuerza es directamente proporcional a la masa y a la aceleración, lo cual vamos a comprobarlo experimentalmente. También es importante determinar la relación entre la masa y la aceleración cuando la fuerza permanece constante. De la ecuación podemos deducir que $a = F/m$, lo que significa que la aceleración es inversamente proporcional a la masa. (Álvarez, M. et al. 2011).

Materiales

- Una tabla de 1,20 m de largo, por 10 cm de ancho y 3 cm de grosor.
- Un taco de madera de 10 cm de largo por 4 cm de ancho y 2 cm de grosor.
- Un taco de madera con forma de grada, según el gráfico.
- Un cáncamo largo.
- Una polea de 5 cm de diámetro que pueda ser empotrada.
- Una cuerda de hilo de 2 m de largo.
- Cuatro grapas para cable eléctrico.
- Dos varillas metálicas de 5 cm de largo y 2 mm de diámetro.
- Cuatros fichas de plásticos de 3,8 cm de diámetro.
- Pegamento epóxico (brujita).
- Dos tarritos de pintura al óleo: uno blanco y otro azul.
- Dos brochas pequeñas para pintar.
- Carrito de madera para el experimento.

- Cordón o cuerda 2 m.
- Pesa de 50 gr (1), pesa de 100 gr (1), pesa de 150 gr (1) y pesa de 200 gr (2).
- Cronometro.
- Cinta adhesiva.
- Balanza de laboratorio.



Procedimiento

Construyan el carrito de la siguiente forma:

1. Una vez que tengan el taco de las dimensiones indicadas, perforen el centro de las fichas plásticas de tal forma que puedan insertar la varilla metálica que hace de eje, fíjenlas con la pega epóxica, permitiendo que quede una distancia de 2 mm entre el taco y la rueda para que pueda girar.

2. Coloquen los ejes sobre el taco a una distancia conveniente y fijen los con las grapas sin ajustar demasiado y así permitir la rotación del eje.

3. En la parte central del lado de 4 cm, coloquen el cáncamo.

4. En el tablero largo, soliciten a un ebanista haga dos canaletas, según el ancho que tenga las ruedas del carrito.

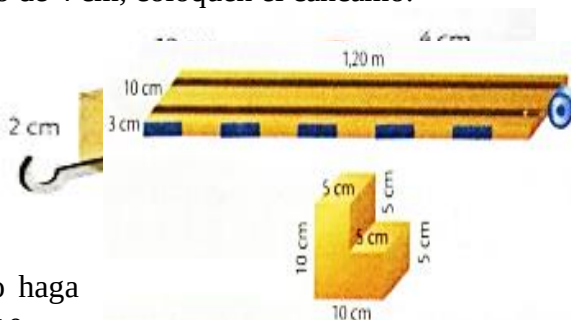
5. Pinten el tablero de blanco, luego que este seco haga una marca en el borde cada 10 cm.

Pinten las marcas alternativamente de color azul.

6. Coloquen la polea plástica En el extremo como indica el grafico.

7. Las gradas de maderas deben de tener las dimensiones indicadas.

8. Coloca el tablero de lanzamiento junto a un extremo de la mesa, de tal modo que la horizontal de la mesa coincida con la línea 0° del tablero.



9. La cuerda se emplea para los experimentos de la segunda ley de newton.
10. Coloca el tablero sobre una mesa. Amarra la cuerda al cáncamo del carrito y a una longitud de más o menos 1,30 m, pon una pesa de 50 gramos.
11. Coloca el carro sobre el tablero, de modo que la parte frontal del carro esté en la marca de 10 cm. Haz que un compañero sujete el carro y extienda la cuerda sobre la polea.
12. Prepara el cronometro cuando estés listo, pide a tu compañero que suelte el carrito y que lo detenga en la marca de 110 cm. Anota en la tabla el tiempo cronometrado.
13. Repite el experimento dos veces más, anotando el tiempo en la tabla 1.
14. Remplaza la pesa de 50 gramos por la de 100 gramos y repite los procedimientos 12 y 13. Has lo mismo con los 150 gramos.

Tabla de datos 1

Tiempos	50 g	100 g	150 g
Tiempo 1			
Tiempo 2			
Tiempo 3			
Prom. Tiempo			
Aceleración			

Tabla de datos 2

Tiempos	50 g	100 g	150 g
Tiempo 1			
Tiempo 2			
Tiempo 3			
Prom. Tiempo			
Aceleración			
Fuerza			

15. Peza en la balanza el carrito, masa del carrito.

16. Pega la pesa de 50 gramos al carrito con la cinta adhesiva. Coloca en el extremo de la cuerda la pesa de 200 gramos y repite el proceso procedimiento 12.

17. Repite el procedimiento anterior, añadiendo al carro la masa de 100 gramos y luego la de 150 gramos.

Cálculos

- Toma los tiempos y el promedio en las dos tablas, anótalos en el lugar correspondiente.
- Utiliza la siguiente ecuación para encontrar la aceleración:
- $d = v \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$
- Pero recuerda que la velocidad inicial en este caso es cero. El tiempo que debes usar es el tiempo promedio, la distancia recorrida es 1 metro. Anota el resultado en la casilla correspondiente en las 2 tablas.
- Utilizando la masa total del carro (masa del carro + masa añadida), calcula la fuerza mediante la ecuación:
- $F = m \cdot a$
- Donde la fuerza es la que provee la masa de 200 gramo.

Conclusiones

- ¿Qué puedes concluir de los valores de la aceleración de la tabla (1)?
- ¿Qué puedes concluir al comparar las aceleraciones obtenidas en la tabla (2)?
- Son confiables al 100 % los resultados obtenidos? ¿Por qué?
- ¿Cumpliste con los objetivos de la practica? Si o no ¿Por qué?
- ¿A mayor masa, menos aceleración? Justifica tu respuesta.

CAPÍTULO 6.

EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO BAJO LA ACCIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES Y COPLANARES.

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

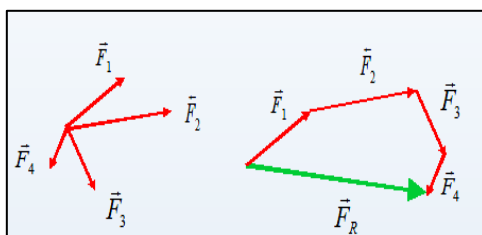
- Cómo aplicar las condiciones que deben satisfacer para que un cuerpo se encuentre en equilibrio.
- Cómo determinar la fuerza neta sobre un objeto y lo que sucede cuando la fuerza neta es cero.
- Cómo relacionar la fuerza neta sobre un objeto.
- Cómo determinar el momento o torca de una fuerza a causa del giro de una máquina.

Definición de estática.

La estática estudia las fuerzas en equilibrio, cuyo objetivo es estudiar las condiciones que deben de cumplir las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, para que estos solidos se encuentren en equilibrios. Por ejemplo, cuando se aplica el peso de un bloque de hierro sobre una pelota de esponja, ésta sufre una deformación y no logra moverla.

6.1. Fuerzas concurrentes

Las *fuerzas concurrentes* son todas las fuerzas cuyas líneas de acción pasan a través de un punto común. Las fuerzas que actúan sobre un objeto puntual son concurrentes porque todas ellas pasan a través del mismo punto, que es el objeto puntual.



Ejemplo de fuerzas concurrentes o angulares.

“Un objeto está en equilibrio bajo la acción de fuerzas concurrentes, siempre que no esté acelerado”.

6.1.1. Primera condición de equilibrio

La primera condición de equilibrio requiere que $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$, o en forma de componentes que:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$$

Es decir, la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto debe ser cero. Esta condición es suficiente para el equilibrio cuando las fuerzas externas son concurrentes. (Jackson, H.; Wirtz, G. 2009).

Método de resolución de problemas de fuerzas concurrentes.

1. Aísle el objeto por estudiar.
2. Muestre en un diagrama, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo aislado (diagrama de cuerpo libre).
3. Encuentre las componentes rectangulares de cada fuerza.
4. Escriba la primera condición de equilibrio en forma de ecuación.
5. Resuelva para determinar las cantidades requeridas.

Peso de un objeto (F_w)

Es la fuerza con que la gravedad tira al cuerpo hacia abajo.

Fuerza de tensión (F_T)

Es la fuerza que actúa sobre una cuerda, un cable o una cadena (o, de hecho, sobre cualquier miembro estructural) y que tiende a alargarlo. La magnitud escalar de la fuerza de tensión es la tensión.

Fuerza de fricción (F_f)

Es una *fuerza tangencial que actúa sobre un objeto* que se opone al deslizamiento del objeto a través de una superficie adyacente con la que está en contacto.

La *fuerza de fricción es paralela a la superficie y opuesta, en sentido, a su movimiento o del movimiento.*

Fuerza normal (F_N)

Sobre un objeto que descansa por una superficie es la componente de la fuerza de soporte que es *perpendicular a la superficie.*

Poleas

Cuando un sistema de varias poleas ligeras sin fricción tiene una cuerda simple continua alrededor de él, la *tensión en cada trozo de la cuerda es igual a la fuerza aplicada al extremo de la cuerda (F)* por algún agente externo. (Jackson, H.; Wirtz, G. 2009).

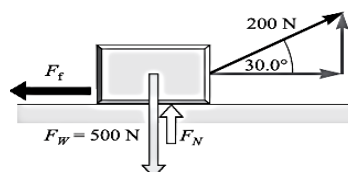
Ejemplo 1.

El objeto de la figura está en equilibrio. Determine el valor de la fuerza normal (F_N)

Datos

$$F = 200 \text{ N}$$

$$\theta = 30^\circ$$



$$F_W = 500 \text{ N}$$

$$F_N = ?$$

Solución

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_N + (200 \text{ N}) \sin 30^\circ - 500 \text{ N} = 0$$

$$F_N + (200 \text{ N}) (0,5) - 500 \text{ N} = 0$$

$$F_N + 100 \text{ N} - 500 \text{ N} = 0$$

$$F_N = 400 \text{ N}$$

Ejemplo 2.

Una esfera cargada de masa de $3 \times 10^{-4} \text{ kg}$ está colgando de un hilo. Una fuerza eléctrica actúa horizontalmente sobre la esfera, de tal manera que el hilo hace un ángulo de 37° . Determine la tensión del hilo y la magnitud de la fuerza eléctrica.

Solución

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_E - T_X = 0$$

$$F_E = T_X$$

$$T_X = T \cdot \cos 53^\circ$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_Y - m \cdot g = 0$$

$$T_Y = m \cdot g$$

$$T_Y = T \cdot \sin 53^\circ$$

$$m \cdot g = T \cdot \sin 53^\circ$$

$$T = \frac{m \cdot g}{\sin 53^\circ}$$

$$T = \frac{(3 \times 10^{-4} \text{ kg}) 9,8 \text{ m/s}^2}{0,7986}$$

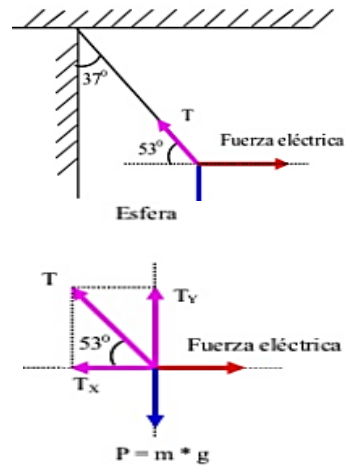
$$T = 3,68 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_E = T_X = T \cdot \cos 53^\circ$$

$$F_E = 3,68 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \cos 53^\circ$$

$$F_E = 3,68 \times 10^{-3} \text{ N} (0,601815)$$

$$F_E = 2,21 \times 10^{-3} \text{ N}$$



Ejemplo 3.

En cada uno de los diagramas, calcular la tensión de las cuerdas AB y BC sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio.

Solución

$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_{CX} - T_{AX} = 0$$

$$T_{CX} = T_{AX}$$

$$T_C \cdot \cos 53^\circ = T_A \cdot \cos 30^\circ$$

$$T_C = \frac{0,866}{0,601} T_A$$

$$T_C = 1,44 T_A \text{ (ecuación 1)}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_{AY} + T_{CY} - W = 0$$

$$T_{AY} + T_{CY} = W$$

$$T_A \cdot \sin 30^\circ + T_C \cdot \sin 53^\circ = 40\text{N}$$

$$0,5 T_A + 0,798 T_C = 40\text{N} \text{ (ecuación 2)}$$

Remplazando ecuación 1 en 2

$$0,5 T_A + 0,798(1,44 T_A) = 40\text{N}$$

$$0,5 T_A + 1,149 T_A = 40\text{N}$$

$$1,649 T_A = 40\text{N}$$

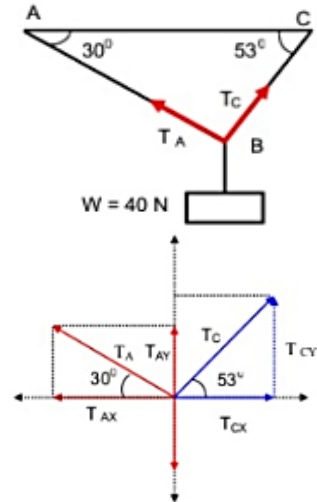
$$T_A = 24,26 \text{ N}$$

Se rempaza en ecuación 1

$$T_C = 1,44 T_A$$

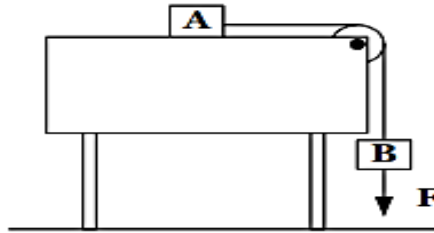
$$T_C = 1,44(24,26 \text{ N})$$

$$T_C = 34,93 \text{ N}$$



Ejemplo 4.

Suponga que los bloques A y B de la figura tienen las masas $M_A = 10 \text{ kg}$ y $M_B = 2 \text{ kg}$, el coeficiente de rozamiento estático (μ_k) en el bloque A y la superficie es 0,4. Determinar el mínimo valor de fuerza para poner el sistema en movimiento.



Solución

En el bloque A

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_N - W_A = 0$$

$$F_N = m_A \cdot g$$

$$F_N = (10 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2)$$

$$\mathbf{F_N = 98 \text{ N}}$$

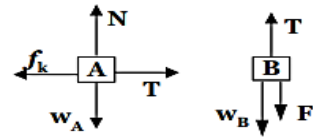
$$\Sigma F_y = 0$$

$$T - f_k = 0$$

$$T = f_k$$

$$T = u_k \cdot F_N$$

$$\mathbf{T = (0,4) (98 \text{ N}) = 39,2 \text{ N}}$$



En el bloque B

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T - W_B - F = 0$$

$$T - W_B = F$$

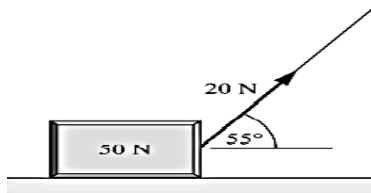
$$39,2 \text{ N} - (2 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2) = F$$

$$F = 39,2 \text{ N} - 19,6 \text{ N}$$

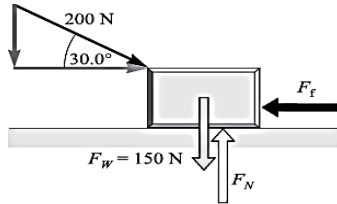
$$\mathbf{F = 19,6 \text{ N}}$$

Ejercicio 14

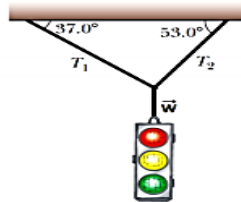
1. El objeto de la figura está en equilibrio, si el peso es de 50 N. Determine el valor de la fuerza normal (F_N)



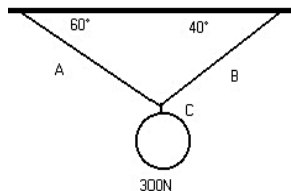
2. El objeto de la figura está en equilibrio. Determine el valor de la fuerza normal (F_N)



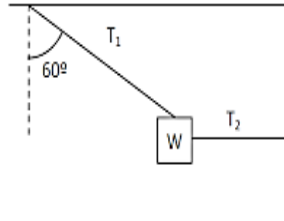
3. Un semáforo de 122 N cuelga a otras dos cuerdas, como se observa en la figura. Encuentra las tensiones en las cuerdas 1 y 2.



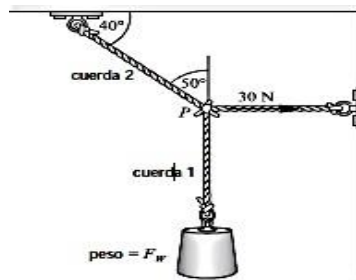
4. Una pelota de 300 N cuelga atada a otras dos cuerdas, como se muestra la figura. Encuentre las tensiones en las cuerdas A, B y C.



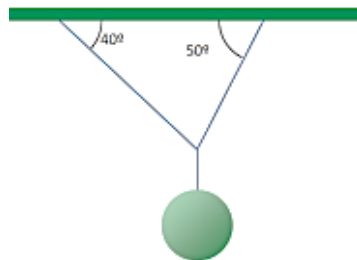
5. Un bloque que pesa 20 N se suspende por medio de una cuerda sin peso, que se mantiene formando un ángulo de 60° con la vertical, mediante una cuerda horizontal. Hallar la magnitud de las tensiones 1 y 2.



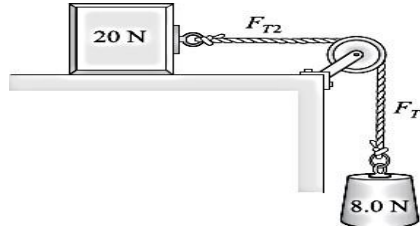
6. En la figura se muestra la tensión en la cuerda horizontal que es de 30 N. Encuentre el peso del objeto.



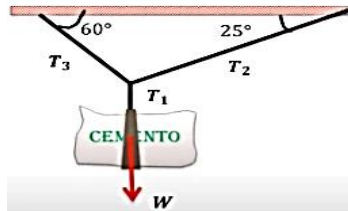
7. Un cuerpo de 490 N se encuentra suspendido del techo por medio de dos cuerdas como se muestra en la figura. Determine el valor de tensión en cada una de ellas.



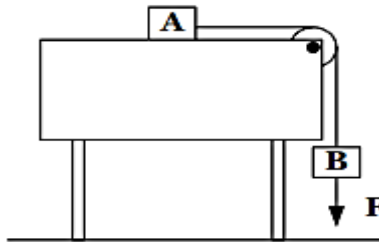
8. Jalado por un bloque de 8 N, como se muestra en la figura, un bloque de 20 N se desliza hacia la derecha con velocidad constante. Calcule el rozamiento cinético (μ_c) entre el bloque y la mesa. Suponga que la fricción en la polea es despreciable.



9. Suponga que los bloques A y B de la figura tienen las masas $M_A = 8 \text{ kg}$ y $M_B = 2,5 \text{ kg}$, el coeficiente de rozamiento estático (μ_k) en el bloque A y la superficie es 0,32. Determinar el mínimo valor de fuerza para poner el sistema en movimiento.



10. Un saco de cemento de 50 kg de masa cuelga en tres cuerdas, dos de las cuales forman ángulo de 60° y 25° con la horizontal. Suponiendo que el sistema está en equilibrio, hallar las tensiones de las cuerdas.



6.2. Fuerzas coplanares

Las fuerzas coplanares, se encuentran en un mismo plano y en 2 ejes, a diferencia de las no coplanares que se encuentran en más de un plano, es decir en 3 ejes. (Jackson, H.; Wirtz, G. 2009).

Torca o momento de torsión

La torca o momento de torsión (τ) alrededor de un eje, debida a una fuerza, es una medida de la efectividad de la fuerza para que ésta produzca una rotación alrededor de un eje. La torca se define de la siguiente forma:

$$\text{Torca} = \tau = r.F.\text{sen } \theta$$

Significado

τ = Momento de torsión o torca (**N.m**)

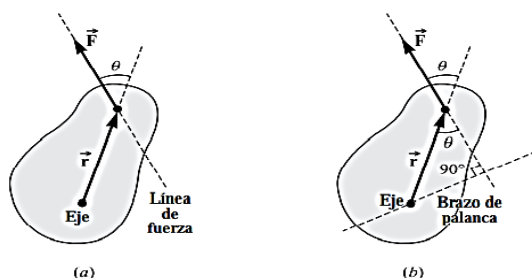
F = Fuerza aplicada al objeto (**N**)

r = Distancia del brazo de la palanca, donde se aplica la fuerza (**m**).

θ = Ángulo en el momento de torsión.

Como se muestra en la figura (a). Con frecuencia, esta definición se escribe en términos del brazo de palanca de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje a la línea de acción de la fuerza, como se muestra en la figura (b). Como el brazo de palanca es igual a (**$r.\text{sen } \theta$**), la ecuación de la torca se reescribe como:

$$\tau = (F) (\text{brazo de palanca})$$



La torca puede ser positiva o negativa; es **positiva** cuando la rotación alrededor del eje es en sentido opuesto al movimiento de las manecillas

del reloj y negativa cuando la rotación es en el mismo sentido en que se mueven las manecillas del reloj.

6.2.1. Condiciones de equilibrio de un sólido

Las condiciones de equilibrio son las leyes que rigen la estática. La estática es la ciencia que *estudia las fuerzas* que se aplican a un cuerpo para describir *un sistema en equilibrio*. Diremos que un sistema está en equilibrio cuando *los cuerpos que lo forman están en reposo*, es decir, *sin movimiento*.

Primera condición de la fuerza.

La suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero: Un cuerpo se encuentra en equilibrio de *traslación* cuando la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0$$

Donde se ha tomado el plano (xy) como el plano de las fuerzas coplanares. (Jackson, H.; Wirtz, G. 2009).

Segunda condición de equilibrio.

Tome un eje perpendicular al plano de las fuerzas coplanares. Todas las torcas que tienden a producir una rotación en el sentido del reloj considérelas como negativas (-), y las que producen una rotación contra el sentido del reloj, como positivas (+); la suma de todas las torcas que actúan sobre el objeto debe ser cero:

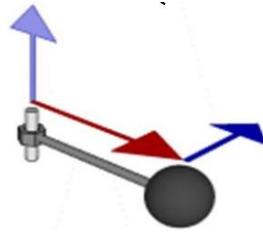
$$\Sigma \tau = 0$$

Centro de gravedad

El centro de gravedad de un objeto es el punto en el cual se puede considerar que está concentrado todo su peso; esto es, la línea de acción del peso que pasa por el centro de gravedad. Una sola fuerza vertical y dirigida hacia arriba, igual en magnitud al peso del objeto y aplicada en el centro de gravedad, mantendrá al cuerpo en equilibrio.

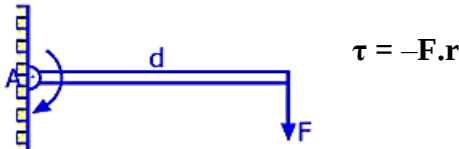
Torca o momento de una fuerza con respecto a un punto

El momento de una fuerza con respecto a un punto da a conocer en qué medida existe una **fuerza o sistema de fuerzas** para cambiar el estado de la rotación del cuerpo alrededor de un eje que pasa por dicho punto. El **momento** de torsión tiende a provocar una aceleración angular, en el cuerpo sobre el cual se aplica y es una magnitud en elementos que trabajan sometidos a **torsión** (como los ejes de maquinarias o las vigas).

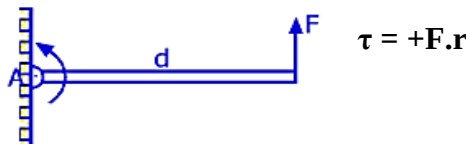


Casos particulares de giro

1. Giro horario, el momento de torsión es *negativo*.



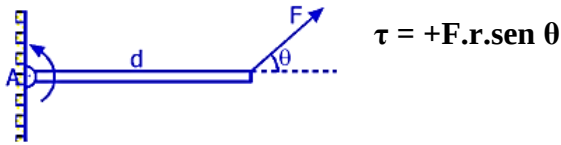
2. Giro antihorario, el momento de torsión es *positivo*.



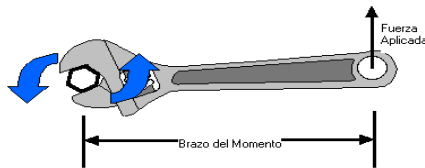
3. Si la línea de acción de la fuerza pasa por el centro de giro, entonces el momento de torsión es *nulo*. No produce giro.



4. Si la fuerza “F” forma un ángulo agudo “ θ ” con la barra, entonces el momento de torsión es *positivo*.



El momento de torsión de una fuerza con respecto a un punto, es una magnitud vectorial, obtenida como



Ejemplo 1.

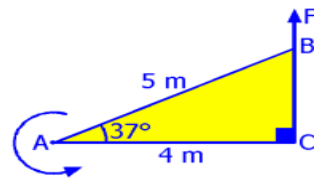
Determinar el momento de torsión de la figura que produce la fuerza $F = 25 \text{ N}$ respecto del punto A.

Datos

$$AC = r = 4 \text{ m}$$

$$F = 25 \text{ N}$$

$$\tau = ?$$



Solución

$$\tau_A = r.F$$

$$\tau_A = (4 \text{ m}) (25 \text{ N})$$

$$\tau_A = 100 \text{ N.m}$$

Ejemplo 2.

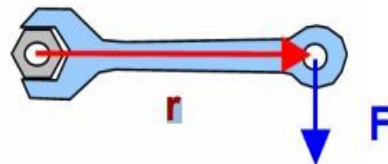
Se coloca una tuerca con una llave como se muestra en la figura. Si el brazo r es igual a 30 cm y el torque de apriete recomendado para la tuerca es de -30 N.m . ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza aplicada?

Datos

$$\tau = -30 \text{ N.m}$$

$$r = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

$$F = ?$$



Solución

$$\tau = r.F$$

$$F = \frac{\tau}{r}$$

$$F = \frac{-30 \text{ N.m}}{0,3 \text{ m}}$$

$$F = -100 \text{ N}$$

Ejemplo 3.

Qué valor tiene el momento de la fuerza de 40 kilo Newton (KN) con un ángulo 30° y 6 m, como se muestra en la figura respecto al punto A.

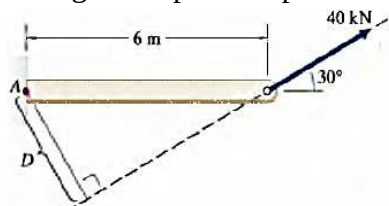
Datos

$$\tau = ?$$

$$F = 40 \text{ KN}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$r = 6 \text{ m}$$



Solución

$$\tau = r.F.\sin \theta$$

$$\tau = (6 \text{ m}) (40 \text{ KN}) \sin 30^\circ$$

$$\tau = 120 \text{ KN.m} = 120\,000 \text{ N.m}$$

Ejemplo 4.

Calcule la torca alrededor del eje A, en cada una de las fuerzas indicadas que es perpendicular.

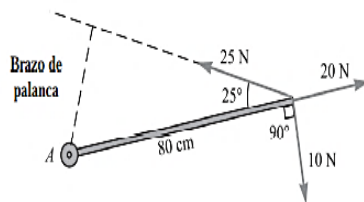
Solución

$$\tau = r.F.\sin \theta$$

$$\tau = (0,80 \text{ m}) (-10 \text{ N})(\sin 90^\circ) = -8 \text{ N.m}$$

$$\tau = (0,80 \text{ m}) (20 \text{ N}) (\sin 0^\circ) = 0$$

$$\tau = (0,80 \text{ m}) (25 \text{ N}) (\sin 25^\circ) = 8,5 \text{ N.m}$$



Ejemplo 5.

La caña de pescar de la figura forma un ángulo de 20° con la horizontal. ¿Cuál es el momento de torsión ejercido por el pez alrededor de un eje perpendicular y que pasa por la mano del pescador?

Datos

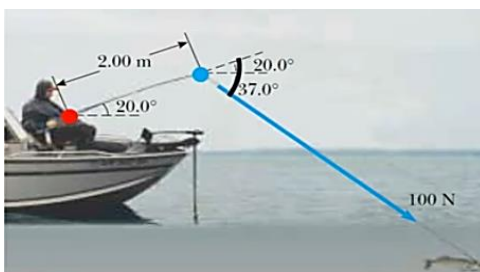
$$r = 2 \text{ m}$$

$$\theta = 20^\circ$$

$$F = 100 \text{ N}$$

$$\theta = 37^\circ$$

$$\tau = ?$$



Solución

$$\tau = r.F.\text{sen } \theta$$

$$\tau = (2 \text{ m} \cos 20^\circ)\vec{i} + (2 \text{ m} \sin 20^\circ)\vec{j} \times (100 \text{ N} \cos 37^\circ)\vec{i} + (-100 \text{ N} \sin 37^\circ)\vec{j}$$

$$\tau = (1,88\vec{i} + 0,68\vec{j}) \text{ m} \times (79,86\vec{i} - 60,18\vec{j}) \text{ N}$$

$$\tau = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ 1,88 & 0,68 \\ 79,86 & -60,18 \end{vmatrix}$$

$$\tau = (-113,14 - 54,3) \text{ N.m}$$

$$\tau = -167,4 \text{ N.m}$$

El momento de torsión es negativo con respecto al eje perpendicular.

Ejemplo 6.

Determinar el momento resultante de la figura respecto a la rótula en el punto A. $F_1 = 20 \text{ N}$, $F_2 = 30 \text{ N}$, $F_3 = 40 \text{ N}$

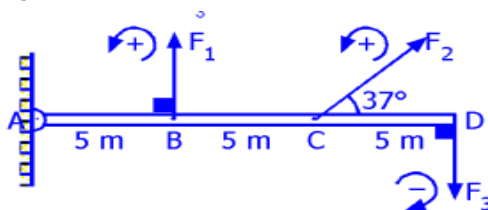
Datos

$$AB = 5 \text{ m} \quad F_1 = 20 \text{ N}$$

$$AC = 10 \text{ m} \quad F_2 = 30 \text{ N}$$

$$AD = 15 \text{ m} \quad F_3 = -40 \text{ N}$$

$$\tau_R = ?$$



Solución

$$\tau_{AB} = r.F_1$$

$$\tau_{AB} = (5 \text{ m}) (20 \text{ N})$$

$$\tau_{AB} = 100 \text{ N.m}$$

$$\tau_{AC} = r.F_2.\text{sen } \theta$$

$$\tau_{AC} = (10 \text{ m}) (30 \text{ N}) (\text{sen } 37^\circ)$$

$$\tau_{AC} = 180,54 \text{ N.m}$$

$$\tau_{AD} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_3$$

$$\tau_{AD} = (15 \text{ m}) (-40 \text{ N})$$

$$\tau_{AD} = -600 \text{ N.m}$$

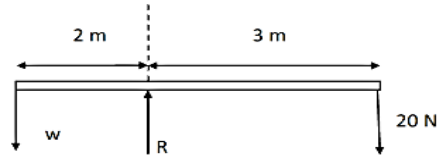
$$\tau_R = \tau_{AB} + \tau_{AC} + \tau_{CAD}$$

$$\tau_R = 100 \text{ N.m} + 180,54 \text{ N.m} - 600 \text{ N.m}$$

$$\tau_R = -319,46 \text{ N.m}$$

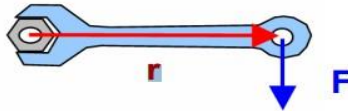
Ejercicio 15

1. En el diagrama de cuerpo libre se puede apreciar la fuerza R que es la fuerza de reacción que ejerce el soporte sobre la barra. Aplicando la segunda condición

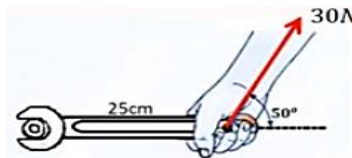


de equilibrio. ¿Cuál debe ser el valor del peso?

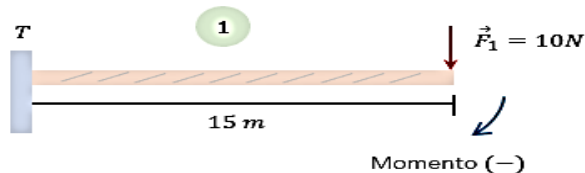
2. Se coloca una tuerca con una llave como se muestra en la figura. Si el brazo r es igual a 35 cm y el torque de apriete recomendado para la tuerca es de $-40 \text{ N}\cdot\text{m}$. ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza aplicada?



3. Un mecánico ejerce una fuerza de 30 N en el extremo de una llave inglesa de 25 cm, como se observa en la figura. Si este tirón forma un ángulo de 50° con el mango de la llave. ¿Cuál es el momento de torsión producido en la tuerca?



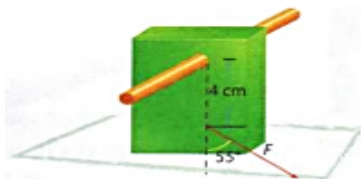
4. En el diagrama de cuerpo libre de la figura (1) se puede apreciar la tensión T que es la fuerza de reacción que ejerce el soporte sobre la barra. Aplicando la segunda condición de equilibrio. ¿Cuál es el momento de torción del brazo de la palanca?



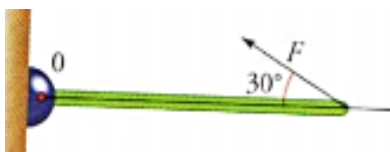
5. Un mecánico aplica a una llave de tuercas de 24 cm de longitud, una fuerza de 20 N para soltar una tuerca de una llave.

6. Repita el cálculo del problema anterior si el tirón de la fuerza forma un ángulo de 40° con el mango de la llave.

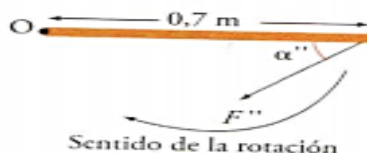
7. El sistema mostrado en la figura está hecho de madera y puede girar sobre su eje. Determina el torque que genera la fuerza de 5 N aplicada a 4 cm del eje.



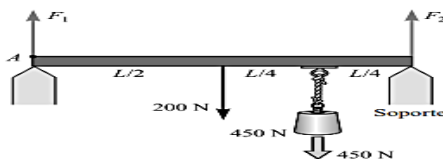
8. En la figura se muestra una barra de 2 metros de largo que puede girar alrededor de un pivote O. En un extremo se aplica una fuerza de 50 N que forma con la barra un ángulo de 30° . Determina el valor del torque.



9. En la figura se muestra la fuerza que mide 50 N, es aplicada a 0,7 m del eje y el ángulo α entre la fuerza y la barra mide 37° . Calcular el valor del torque. R $-21,1 \text{ N.m}$



10. Una viga metálica uniforme de longitud (L) pesa 200 N y sostiene un objeto de 450 N como se muestra en la figura. Calcule la magnitud de las fuerzas que ejercen sobre la viga las columnas de apoyo colocadas en los extremos. Suponga que las longitudes son exactas. R $F_1 = 212,5 \text{ N}$ y $F_2 = 437,5 \text{ N}$



LABORATORIO: PRÁCTICA N° 10

SEGUNDA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO

Objetivo

Calcular el momento de torsión resultante de un sistema de fuerzas paralelas.

Fundamento teórico

En muchos casos las fuerzas que actúan sobre un objeto no tienen un punto de aplicación común. Este tipo de fuerzas se llaman **no concurrentes**. Por ejemplo, el volante de un automóvil gira por el efecto de fuerzas que no tienen un punto de aplicación común, un mecánico ejerce un par de fuerzas en una llave para apretar un perno como se indica en la figura.

En casos como estos, puede haber una tendencia a girar que se define como **momento de torsión**. Si aprendemos a medir y a prever los momentos de torsión producidos por ciertas fuerzas, será posible obtener los efectos rotacionales deseados. Esto conduce en forma natural a la condición de equilibrio rotacional, que es muy importante en aplicaciones industriales y en ingeniería. (Álvarez, M. et al. 2011).



Materiales

- 2 dinamómetros de resortes.
- 1 barra de 40 cm.
- 2 nueces con ganchos.
- 1 disco de torsión.
- 2 portas pesas para pesos de 5 N.
- 3 pesas de 5 N.

- 1 muelle de sujeción.

Procedimiento

Construya el dispositivo de la figura:

1. Coloca el disco de torsión junto con la barra seccionada en el centro del pizarrón de estática.

2. Cuelga una porta pesas con 2 pesas de 5 N, 10 cm a la izquierda del eje de rotación.

3. Adiciona una pesa de 5 N en la porta pesas que está a la derecha del eje de rotación. A cierta distancia siempre buscando el equilibrio.

4. Ata un extremo del cordón ajustable a 10 cm del eje de rotación

y el otro al dinamómetro, como se muestra en la figura, lectura F_3 .

5. Calcula la fuerza resultante del sistema de fuerzas.

6. Calcula el momento de cada una de las fuerzas del sistema.

7. Calcula el momento resultante.

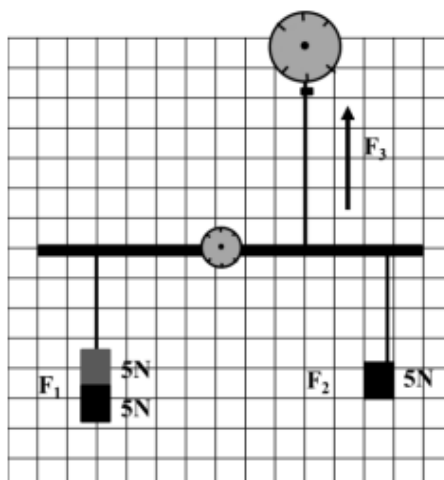


Tabla de datos

Fuerza (N)	r (m)	$\tau = r.F.\text{sen } \theta$
F_1	r_1	τ_1
F_2	r_2	τ_2
F_3	r_3	τ_3
		$\sum \tau =$

Conclusiones

- ¿Qué puedes concluir de los valores de la fuerza de la tabla?
- ¿Qué puedes concluir al comparar los momentos de torsión de la tabla?
- Son confiables al 100 % los resultados obtenidos? ¿Por qué?

- ¿Cumpliste con los objetivos de la practica? Si o no ¿Por qué?
- ¿Qué puedes concluir del momento de torsión resultante de un sistema de fuerzas paralelas?

CAPÍTULO 7.

TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA.

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo una fuerza efectúa un trabajo sobre un cuerpo, y cómo calcular la cantidad de trabajo realizado.
- Cómo el trabajo efectuado sobre un cuerpo cambia la energía cinética del cuerpo y cómo utilizar este principio para resolver problemas de mecánica.
- Cómo resolver problemas que implican potencia en el trabajo efectuado.

7.1. Trabajo mecánico

Podemos pensar en trabajo mecánico, cuando vemos a una persona transportar un objeto pesado o cuando subimos las escaleras. *Realizar un trabajo implica consumir energía.* Ambos conceptos se relacionan no sólo en las teorías físicas, sino en nuestro lenguaje cotidiano.

El concepto de trabajo surgió mucho tiempo después de que Newton descubrió las leyes de movimiento y fue asociado a una magnitud producto de la utilización de mecanismos, por ello es común que cuando hablamos de una máquina que funciona, decimos que está trabajando. (Baing, A.; Agustench, M. 2007).

Esta idea conocida como trabajo mecánico, está en relación con el concepto de fuerza. *Para que exista el trabajo es necesaria la fuerza mecánica* pues ésta realiza trabajo al desplazar su punto de aplicación en su misma dirección.

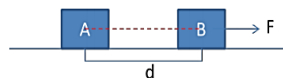


En todos los casos en los que se realiza un trabajo, intervienen tres factores:

- La aplicación de una fuerza.
- El desplazamiento.
- Una componente a lo largo del desplazamiento.

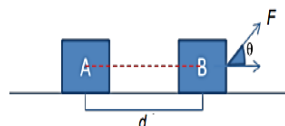
Se considera que la fuerza es constante y el movimiento es en línea recta y en la dirección de la fuerza. Entonces el trabajo que realiza la fuerza aplicada sobre un objeto se define como el *producto de la fuerza por distancia que recorre el objeto*. En forma abreviada:

$$W = F \cdot d$$



Si la fuerza que actúa sobre el cuerpo realiza un trabajo formando un ángulo con la dirección de desplazamiento, la fórmula es:

$$W = F \cdot d \cdot \cos \theta$$



Decimos que el *trabajo es negativo* cuando la fuerza y el desplazamiento forman el *ángulo mayor de 90° hasta 180°*. Por ejemplo, al intentar mover la piedra, la fricción actúa en dirección contraria al desplazamiento formando un ángulo de 180° por lo que el *trabajo es negativo*.



Unidades: el trabajo es una magnitud escalar, cuyas unidades son las de una fuerza multiplicada por la distancia.

En el SI: $F \cdot d = W$

$$[N] [m] = [\text{joule}] [J]$$

En el CGS: $F \cdot d = W$

$$[\text{Dina}] [\text{cm}] = [\text{ergios}] [\text{erg}]$$

En el técnico: $F \cdot d = W$

$$[\text{kgf}] [m] = [\text{kilográmetro}] [\text{kgm}]$$

Equivalencia: $1 J = 10^7 \text{ erg}$

Ejemplo 1.

Un barco remolcador ejerce una fuerza constante de 5 000 N sobre un barco que se mueve con rapidez constante a través del mar. ¿Cuánto trabajo hace el remolcador sobre el barco en una distancia de 4 km?

Datos

$$F = 5\,000 \text{ N}$$

$$d = 4 \text{ km} = 4\,000 \text{ m}$$

$$W = ?$$

Solución

$$W = F.d$$

$$W = 5\,000\text{ N} (4\,000\text{ m})$$

$$W = 20\,000\,000\text{ J}$$

Ejemplo 2.

Un hombre carga a su esposa de 50 kg en su noche de bodas para entrar a su nueva casa una distancia de 80 cm. ¿Qué trabajo realiza el esposo?

Datos

$$m = 50\text{ kg}$$

$$d = 80\text{ cm} = 0,8\text{ m}$$

$$g = 9,8\text{ m/s}^2$$

$$W = ?$$

Solución

$$W = F.d$$

$$W = m.g.d$$

$$W = (50\text{ kg}) (9,8\text{ m/s}^2) (0,8\text{ m})$$

$$W = 392\text{ J}$$

Ejemplo 3.

Para poder arrancar un auto de 900 kg a empujones, necesita como mínimo recorrer 4 m de distancia. Si entre varios hombres realizaron un trabajo al empujarlo. ¿Qué trabajo realizaron exactamente para que el auto encienda?

Datos

$$m = 900\text{ kg}$$

$$d = 4\text{ m}$$

$$W = ?$$

Solución

$$F = m.g$$

$$F = (900\text{ kg}) (9,8\text{ m/s}^2) = 8\,820\text{ N}$$

$$W = F.d$$

$$W = (8\,820\text{ N}) (4\text{ m}) = 35\,280\text{ J}$$

Ejemplo 4.

¿Qué fuerza necesita aplicar una grúa para subir 6 niveles de 2,5 m cada uno, si desarrolla un trabajo de 120 000 J?

Datos

$$F = ?$$

$$d = 6 \times 2,5 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

$$W = 120\,000 \text{ J}$$

Solución

$$W = F \cdot d$$

$$F = \frac{W}{d} = \frac{120\,000 \text{ N}\cdot\text{m}}{15 \text{ m}}$$

$$\mathbf{F = 8\,000 \text{ N}}$$

Ejemplo 5.

Se empuja un mueble de 50 kg una distancia de 3 m a lo largo de una superficie horizontal aplicando una fuerza de 700 N, existiendo una fuerza de fricción entre el mueble y el piso con un coeficiente de 0,12.

Determinar:

- La fuerza de fricción.
- El trabajo realizado por la fuerza de 700 N.
- El trabajo realizado por la fuerza de fricción.
- El trabajo neto realizado sobre el mueble.

Datos

$$m = 50 \text{ kg}$$

$$d = 3 \text{ m}$$

$$F = 700 \text{ N}$$

$$\mu_f = 0,12$$

Solución

$$\mathbf{a) F_N = m \cdot g}$$

$$F_N = (50 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2) = \mathbf{490 \text{ N}}$$

$$\mathbf{F_f = \mu_f \cdot F_N}$$

$$F_f = (0,12) (490 \text{ N}) = \mathbf{58,8 \text{ N}}$$

b) $W_F = F \cdot d$

$W_F = (700 \text{ N}) (3 \text{ m}) = \mathbf{2\,100 \text{ J}}$

c) $W_f = F_f \cdot d \cdot \cos 180^\circ$

$W_f = (58,8 \text{ N}) (3 \text{ m}) (-1) = \mathbf{-176,4 \text{ J}}$

d) $W_{\text{neto}} = W_F + W_f$

$W_{\text{neto}} = 2\,100 \text{ J} - 176,4 \text{ J} = \mathbf{1\,923,6 \text{ J}}$

Ejemplo 6.

Scarleth empuja a su hermano con una fuerza de 40 N en un ángulo de 35° hacia abajo desde la horizontal. Encuentra el trabajo que realiza Scarleth después de empujarlo una distancia de 1,2 m.

Datos

$F = 40 \text{ N}$

$\theta = 35^\circ$

$d = 1,2 \text{ m}$

$W = ?$

Solución

$W = F \cdot d \cdot \cos \theta$

$W = (40 \text{ N}) (1,2 \text{ m}) (\cos 35^\circ)$

$W = 39,32 \text{ J}$

Ejemplo 7.

¿Cuánto trabajo se realiza contra la gravedad al levantar un objeto de 3 kg a través de una distancia vertical de 50 cm?

Datos

$m = 3 \text{ kg}$

$h = 50 \text{ cm} = \mathbf{0,5 \text{ m}}$

$W = ?$

Solución

El trabajo realizado en contra de la gravedad es mgh .

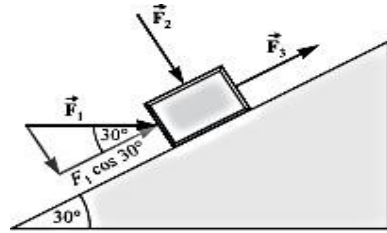
$W = (m \cdot g) (h)$

$W = (3 \text{ kg}) (9,8 \text{ m/s}^2) (0,50 \text{ m})$

$W = 14,7 \text{ J}$

Ejemplo 8.

Un bloque se mueve hacia arriba por un plano inclinado 30° bajo la acción de las tres fuerzas que se muestran en la figura. F_1 , es horizontal y de 40 N de magnitud. F_2 , es normal al plano. F_3 es paralela al plano y de 30 N de magnitud. Determine el trabajo realizado por cada una de las fuerzas cuando el bloque (y el punto de aplicación de cada fuerza) se mueve 80 cm hacia arriba del plano inclinado.

**Solución**

$$W_1 = (F_1 \cos \theta) (d)$$

$$W_1 = (40 \text{ N}) (\cos 30^\circ) (0,8 \text{ m})$$

$$W_1 = 27,7 \text{ J}$$

F_2 no desarrolla trabajo, no tiene componentes en la dirección del desplazamiento

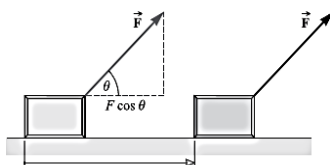
$$W_3 = (F_3) (d)$$

$$W_3 = (30 \text{ N}) (0,8 \text{ m})$$

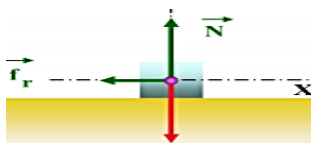
$$W_3 = 24 \text{ J}$$

Ejercicio 16

1. Una fuerza de 4 N actúa a lo largo de una distancia de 15 metros en la dirección de la fuerza. Hallar el trabajo realizado.
2. Un objeto de 5 kg se eleva 1,8 m. ¿Cuánto trabajo se efectúa contra la gravedad de la Tierra?
3. Un barco remolcador ejerce una fuerza constante de 6 000 N sobre un barco que se mueve con rapidez constante a través del mar. ¿Cuánto trabajo hace el remolcador sobre el barco en una distancia de 3 km?
4. Para poder arrancar un auto de 1 000 kg a empujones, necesita como mínimo recorrer 5 m de distancia. Si entre varios hombres realizaron un trabajo al empujarlo. ¿Qué trabajo realizaron exactamente para que el auto encienda?
5. En la figura, suponga que el objeto se jala con una fuerza de 75 N en la dirección de 28° sobre la horizontal. ¿Cuánto trabajo desarrolla la fuerza al tirar del objeto 10 m?

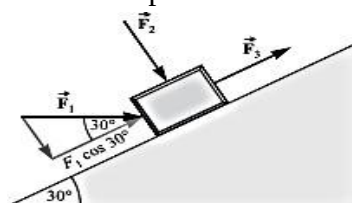


6. Un objeto cuya fuerza normal es de 200 N, se desplaza 1,5 metros sobre una superficie horizontal hasta detenerse. El coeficiente de rozamiento entre la superficie y el bloque es de 0,1. Determine el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.



7. ¿Cuánto trabajo se realiza contra la gravedad al levantar un objeto de 4 kg a través de una distancia vertical de 60 cm?

8. Un cuerpo de 300 g se desliza 80 cm a lo largo de una mesa horizontal ¿Cuánto trabajo se realiza para superar la fricción entre el cuerpo y la mesa, si el coeficiente de fricción cinética es 0,20?
9. Calcule el trabajo realizado en contra de la gravedad por una bomba que descarga 600 litros de gasolina dentro de un tanque que se encuentra a 20 metros por encima de la bomba. Un centímetro cúbico de gasolina tiene una masa de 0,82 gramos y 1 litro tiene 1000 cm³.
10. Un bloque se mueve hacia arriba por un plano inclinado 30° bajo la acción de las tres fuerzas que se muestran en la figura. F_1 , es horizontal y de 50 N de magnitud. F_2 , es normal al plano. F_3 es paralela al plano y de 25 N de magnitud. Determine el trabajo realizado por cada una de las fuerzas cuando el bloque (y el punto de aplicación de cada fuerza) se mueve 60 cm hacia arriba del plano inclinado.



7.2. Energía cinética y potencial

Breve historia de la energía: antiguamente el hombre dependía de la energía que obtenía de los alimentos para desarrollar todas sus actividades de caza, pesca y recolección de frutos. (Cromer, A. 2008).



Sin embargo, a través de los años, descubrió el fuego; empezó a utilizar el calor, una forma importante de energía, y con el pasar de los años inventó máquinas que, para que funcionen requieren de una fuente de energía, y esto ayuda a realizar menor esfuerzo, primero fue con máquinas simples como el plano inclinado, la palanca, el tornillo, las poleas o la rueda.

Posteriormente, durante la Revolución Industrial, aparecieron máquinas más complejas como el motor de combustión interna que hoy utilizan la mayoría de los transportes.



A finales del siglo XIX comenzó a utilizarse la energía eléctrica para iluminarnos cuando la luz del Sol desaparece.

Los científicos han aprendido a liberar la energía que se encuentra en los núcleos atómicos y aprovecharla con varios fines, aunque algunas veces el mismo ser humano la ha utilizado para construir armas de destrucción masiva.



¿Qué es energía?

La energía (**E**) es una medida del cambio impartido a un sistema y que se puede transferir mecánicamente a un objeto cuando una fuerza trabaja sobre dicho objeto. La cantidad de energía dada a un objeto mediante la acción de una fuerza sobre una distancia es igual al trabajo realizado. Así, ***cuando un objeto realiza trabajo, proporciona una cantidad de energía igual al trabajo efectuado.*** Debido a que el cambio puede realizarse en distintas maneras, hay una variedad de formas de energía. Todas las formas de energía, incluido el trabajo, tienen las mismas unidades, **Joules (J)**. La energía es una **cantidad escalar**. Un objeto es capaz de realizar trabajo si posee energía.

7.2.1. Energía cinética

La energía cinética (**EC**) que posee un objeto debido a su movimiento. Si un objeto de masa (**m**) tiene velocidad (**v**), su energía cinética traslacional está dada por. (Cromer, A. 2008).

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

La energía cinética diciendo que es la capacidad que tiene un cuerpo para producir trabajo en virtud de su velocidad, podemos concluir que:

- La energía cinética es directamente proporcional a la masa del cuerpo.
- La energía cinética es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo.
- La energía cinética no depende de la dirección en la que se esta moviendo el cuerpo.

Unidades: la energía cinética es una *magnitud escalar* cuyas unidades son las mismas del trabajo.

En el SI:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_C = \text{kg(m/s)}^2$$

$$E_C = (\text{kg.m/s}^2)\text{m}$$

$$E_C = \text{N.m}$$

$$E_C = (\text{Joule}) (\text{J})$$

En el CGS:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_C = \text{g(cm/s)}^2$$

$$E_C = (\text{g.cm/s}^2) \text{ cm}$$

$$E_C = \text{Dina.cm}$$

$$E_C = (\text{ergio}) (\text{erg})$$

7.2.2. Energía potencial gravitacional

La energía potencial gravitacional (**EP_G**), es la energía que posee un objeto debido a su posición en el campo gravitacional. Un cuerpo de masa, al caer una distancia vertical, puede realizar un trabajo de magnitud (**m.g.h**). La (**EP_G**) de un objeto se define con respecto a un

nivel arbitrario cero, el cual a menudo es la superficie de la Tierra. Si un objeto está a una altura sobre el nivel cero (o de referencia), se tiene.

$$EP_G = m \cdot g \cdot h$$

Se acostumbra elegir como nivel de referencia el nivel más bajo que aparezca, para evitar valores negativos, podemos concluir que:

- La energía potencial gravitacional es directamente proporcional a la masa del cuerpo.
- La energía potencial gravitacional es directamente proporcional a la posición del cuerpo, respecto a un nivel de referencia.

Unidades: la energía potencial gravitacional es una magnitud escalar cuyas unidades son las misma del trabajo.

En el SI:

$$EP_G = m \cdot g \cdot h$$

$$EP_G = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}$$

$$EP_G = \text{N} \cdot \text{m}$$

$$E_C = \text{J}$$

En el CGS:

$$EP_G = m \cdot g \cdot h$$

$$EP_G = \text{g} \cdot \text{cm/s}^2 \cdot \text{cm}$$

$$EP_G = \text{Dinas} \cdot \text{cm}$$

$$EP_G = \text{erg}$$

Teorema del trabajo-energía

Cuando se realiza trabajo sobre una masa puntual o sobre un cuerpo rígido y no hay cambio en la **EP**, la energía impartida sólo puede aparecer como **EC**. Sin embargo, debido a que un cuerpo no es por completo rígido, se puede transferir energía a sus partes y el trabajo realizado sobre él no será precisamente igual a su cambio en la **EC**.

La Energía mecánica (**Em**) es la suma de la energía cinética más energía potencial. (Cromer, A. 2008).

Ejemplo 1.

Calcule la energía cinética de un mazo de 4 kg en el instante en que la velocidad es 24 m/s

Datos

$$E_C = ?$$

$$m = 4 \text{ kg}$$

$$v = 24 \text{ m/s}$$

Solución

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} 4 \text{ kg} (24 \text{ m/s})^2$$

$$E_C = 1\,152 \text{ J}$$

Ejemplo 2.

Calcule la energía cinética de un automóvil de 1600 N que viaja 80 km/h

Datos

$$E_C = ?$$

$$W = 1600 \text{ N}$$

$$V = 80 \text{ km/h} = 22,22 \text{ m/s}$$

$$m = ?$$

Solución

$$W = m \cdot g$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{1\,600 \text{ N}}{9,8 \text{ m/s}^2}$$

$$m = \frac{1\,600 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{9,8 \text{ m/s}^2} = 163,27 \text{ kg}$$

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} 163,27 \text{ kg} (22,22 \text{ m/s})^2 = 40\,305 \text{ J}$$

Ejemplo 3.

¿Qué fuerza media (F) es necesaria para detener una bala de 16 gramos que viaja a 260 m/s y que penetra en un trozo de madera a una distancia de 12 cm?

Datos

$$F = ?$$

$$m = 16 \text{ gr} = \mathbf{0,016 \text{ kg}}$$

$$v_0 = 0,$$

$$v_f = 260 \text{ m/s},$$

$$d = 12 \text{ cm} = \mathbf{0,12 \text{ m}}$$

Solución

$$F_x = \frac{1}{2}m.(v_0)^2 - \frac{1}{2}m.(v_f)^2 \longrightarrow F_x = -\frac{1}{2}m.(v_f)^2$$

$$F = -\frac{m.v_f^2}{2.x}$$

$$F = -\frac{0,016 \text{ kg}(260 \text{ m/s})^2}{2(0,12 \text{ m})}$$

$$\mathbf{F = -4\,506,7 \text{ N}}$$

El signo menos indica que la (F) es opuesta al desplazamiento.

Ejemplo 5.

Una caja de herramientas de 1,2 kg se halla 2 m por encima de una mesa que está a la vez a 80 cm del piso. Determine la energía potencial respecto a la parte superior de la mesa y respecto al piso.

Datos

$$E_p = ?,$$

$$m = 1,2 \text{ kg}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$h = \mathbf{2 \text{ m por encima de la mesa}}$$

$$h = 80 \text{ cm} = \mathbf{0,80 \text{ m respecto al piso}}$$

Solución

$$E_p = m.g.h$$

$$E_p = 1,2 \text{ kg} (9,8 \text{ m/s}^2) (2 \text{ m}) = \mathbf{23,52 \text{ J}} \text{ (Por encima de la mesa)}$$

$$E_p = m.g.h$$

$$E_p = 1,2 \text{ kg} (9,8 \text{ m/s}^2) (2 \text{ m} + 0,8 \text{ m})$$

$$E_p = 11,76 \text{ N} (2,8 \text{ m})$$

$$\mathbf{E_p = 32,93 \text{ J}} \text{ (A partir del piso y la altura de la caja)}$$

7.3. Potencia mecánica

Al producirse un trabajo, puede ser que su ejecución sea lenta o muy rápida, ya que es independiente del tiempo. Cuando hablamos de potencia, regularmente se confunde con una fuerza grande y poderosa, sin embargo, la realidad es que una máquina no es muy potente por su fuerza, sino por el tiempo de aplicación de esta, es decir, que una máquina será más potente cuando realice un trabajo en menos tiempo.

Potencia: cantidad de trabajo que desarrolla un dispositivo eléctrico durante un periodo, es decir, la rapidez con que transforma o transfiere energía. (Goldemberg, J. 2010).

Las fórmulas para calcular la potencia son:

$P = \frac{W}{t}$	$P = F \cdot v$
-------------------	-----------------

Unidades: la potencia es una *magnitud escalar*, cuyas unidades son las del trabajo divididas por las del tiempo:

En el SI:

$$\frac{W}{t} = P$$

$$\frac{J}{s} = (\text{vatio}) (W)$$

1 vatio es la potencia de una máquina que realiza un trabajo de un Joule.

En el CGS:

$$\frac{W}{t} = P$$

$$\frac{\text{erg}}{s} = \frac{\text{erg}}{s}$$

1 erg/s es la potencia de una máquina que realiza un trabajo de un erg en cada segundo.

Se emplea con frecuencia es el caballo fuerza (**hp**) = **746 vatio**.

1 kilovatio hora (kwh) = $3,6 \times 10^6 J$ = 3,6 Mega Joule (MJ)

Ejemplo 6.

¿Cuánto tiempo está encendida una máquina que tiene una potencia de 750 watts y que realiza un trabajo de 2 500 J?

Datos

$$t = ?$$

$$P = 750 \text{ watts}$$

$$W = 2\,500 \text{ J}$$

Solución

$$P = \frac{W}{t}$$

$$t = \frac{W}{P}$$

$$t = \frac{2\,500 \text{ J}}{750 \text{ watts}} = \frac{2\,500 \cancel{\text{J}}}{750 \cancel{\text{J/s}}}$$

$$t = 3,33 \text{ s}$$

Ejemplo 7.

Un anuncio publicitario pregona que cierto automóvil de 1 200 kg puede acelerar desde el reposo hasta 25 m/s en un tiempo de 8 segundo. ¿Qué potencia promedio debe desarrollar el motor para originar esta aceleración? Dé su respuesta en watts (**W**) y en caballos de fuerza (**hp**). Ignore las pérdidas por fricción.

Datos

$$m = 1\,200 \text{ kg}$$

$$v_o = 0$$

$$v_f = 25 \text{ m/s}$$

$$t = 8 \text{ s}$$

$$P = ?$$

Solución

$$\text{Trabajo realizado (W)} = E_C = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_o^2) \longrightarrow E_C = \frac{1}{2} m \cdot v_f^2$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\frac{1}{2} m \cdot v_f^2}{t}$$

$$P = \frac{\frac{1}{2} 1\,200 \text{ kg} (25 \text{ m/s})^2}{8 \text{ s}} = 46\,875 \text{ watts}$$

$$P = 46\,875 \text{ watts} \frac{1 \text{ hp}}{746 \text{ watts}} = 62,8 \text{ hp}$$

Ejemplo 8.

Se aplica una fuerza de 5 000 N para mantener un automóvil en movimiento a 80 km/h. Calcula su potencia en watts y hp.

Datos

$$F = 5\,000\text{ N}$$

$$v = 80 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \frac{1\,000\text{ m}}{1\cancel{\text{km}}} \frac{1\cancel{\text{h}}}{3\,600\text{ s}} = 22,22\text{ m/s}$$

$$P = ?$$

Solución

$$P = F \cdot v$$

$$P = 5\,000\text{ N} (22,22\text{ m/s}) = 111\,100\text{ watts}$$

$$P = 111\,100\text{ watts} \frac{1\text{hp}}{746\text{ watts}} = 148,93\text{ hp}$$

Ejercicio 17

1. Calcula la energía cinética de un vehículo de 1 000 kg de masa que circula a una velocidad de 120 km/h.
2. Calcula la masa de una pelota de béisbol que es lanzada con una velocidad de 3 m/s y que adquiere una energía cinética de 25 J.
3. Calcule la energía cinética de un mazo de 5 kg en el instante en que la velocidad es 30 m/s.
4. Calcula la velocidad a la que va trotando una persona de 65 kg que adquiriera una energía cinética de 700 J.
5. Calcule la energía cinética de un automóvil de 1 800 N que viaja 90 km/h.
6. Calcula la energía potencial que posee un libro de 500 g de masa que está colocado sobre una mesa de 80 cm de altura.
7. ¿En qué piso de un estacionamiento se encuentra un auto de 840 kg para que su energía potencial sea de 39 600 J, si cada piso mide 2,4 m?
8. Calcula la masa de un objeto que se levanta hasta una altura de 12 m que adquiere una energía potencial de 2 120 J.
9. Una caja de herramientas de 1,5 kg se halla 2,1 m por encima de una mesa que está a la vez a 90 cm del piso. Determine la energía potencial respecto a la parte superior de la mesa y respecto al piso.
10. A una altura de 30 metros desde el suelo, se mueve un objeto volador de 3 kg con una velocidad de 6 m/s. Determine su energía mecánica.
11. Determina la potencia que se manifiesta cuando se efectúa un trabajo de 500 J durante 30 s.
12. ¿Qué trabajo se requiere para que un foco de 100 watts permanezca encendido durante 2 h?
13. ¿Cuánto tiempo está encendida una máquina que tiene una potencia de 800 watts y que realiza un trabajo de 2 600 J?
14. Se aplica una fuerza de 8 000 N para mantener un automóvil en movimiento a 100 km/h. Calcula su potencia en watts y hp.

15. Un vehículo circula por una carretera a velocidad constante de 72 km/h. Si la potencia desarrollada es de 70 hp, determinar la fuerza desarrollada por el motor.

LABORATORIO: PRÁCTICA N° 11

TRABAJO Y ENERGÍA

Objetivos

Analizar cuantitativamente el trabajo realizado al desplazar un cuerpo sobre una mesa.

Relacionar el trabajo y la energía potencial en un plano inclinado.

Fundamento teórico

Una fuerza aplicada a un cuerpo en el mismo sentido de su desplazamiento produce un trabajo que esta dado por:

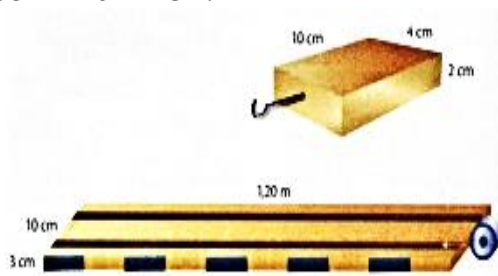
$$W = F \cdot d \quad (1)$$

Si la fuerza es aplicada para subir un cuerpo por un plano inclinado sin rozamiento, el trabajo realizado es igual a la energía potencial que ha adquirido el cuerpo, esto es:

$$E_P = m \cdot g \cdot h \quad (2)$$

Materiales

- Tablero de experimentación con polea.
- Bloque de madera con gancho de 2 x 10 x 4 cm.
- Dinamómetro de 1 N.
- Carrito de prueba.
- Pesa de 50, 100 y 200 gramos.
- Flexómetro.
- Balanza de laboratorio.



Procedimiento

1. Coloca el bloque de madera con gancho, sobre un extremo de la mesa de laboratorio. Pon el dinámometro en el gancho del bloque y arrástralo lentamente, con fuerza constante a lo largo de la mesa. Luego mide la distancia recorrida y la fuerza que has aplicado y anota los datos en la tabla 1.

2. Repite el procedimiento anterior, pero colocando previamente una masa de 200 gramos sobre el bloque y asegúrate que recorra la misma distancia.
3. Añade luego otros 200 gramos y repite los procedimientos anteriores.

Tabla I

Fuerza (N)	d (m)	W (J)

4. Coloca el bloque de madera vertical y sobre él apoyo y el extremo con la polea del tablero de experimentación para obtener un plano inclinado.
5. Repite los procedimientos, pero con el carrito de prueba, mide la altura a que ha llegado el carrito de prueba, descontando el grosor del tablero. Anota los datos en la tabla 2.
6. Mide en la balanza de laboratorio la *masa* del carrito de prueba. (Álvarez, M. et al. 2011).

Tabla II

Fuerza (N)	d (m)	W (J)	Altura (m)	$E_p = (J)$

Cálculos

Con los datos de la tabla I y utilizando la ecuación (1), encuentra el trabajo realizado en cada uno de los experimentos y anota el resultado en la tabla.

2. Con los datos de la tabla II, calcula el trabajo realizado en el plano inclinado.

3. Calcula la energía potencial del carro de prueba en la parte alta del plano inclinado, mediante la ecuación (2), tomando en cuenta el aumento de masa en el segundo y tercer experimento.

Conclusiones

¿Es igual el trabajo realizado al transportar al bloque sobre la mesa en las tres experiencias? Explica tu respuesta

Compara el trabajo en la tabla II con la respectiva energía potencial.

¿Qué puedes concluir?

¿Cumpliste con los objetivos formulados?

¿Qué diferencia hubo en experimentar con la caja de madera con gancho y el carrito de madera?

¿Qué relación existe entre el trabajo y la energía potencial de un cuerpo que se ubica en un plano inclinado?

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS

Ejercicio 1.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1. 500 g | 2. 2,16 m ² | 3. 250 000 mg |
| 4. 7,77 m/s | 5. 3 375 000 l | 6. 11, 36 kg |
| 7. 7,22 ft | 8. 7,93 gal. | 9. 74,58 mi/h |
| 10. 94,72 ml | 11. 2,55 x 10 ⁻⁵ | 12. 5,03 x 10 ⁷ |
| 13. 7,84 x 10 ⁸ | 14. 2,55 x 10 ⁻⁶ | 15. 3,33 x 10 ⁻¹⁷ |

Ejercicio 2.

1. $v = 25 \text{ m/s}$ 2. $v = 198 \text{ km/h}$

Ejercicio 3.

1. a) $A_x = 6,6 \text{ m}$ $A_y = 4,6 \text{ m}$; b) $\vec{A} = (6,6; 4,6) \text{ m}$; c) $\alpha = 35^\circ$ $\beta = 55^\circ$
 d) $\vec{A} = (6,6\vec{i} + 4,6\vec{j}) \text{ m}$; e) $\vec{U}_A = 0,82\vec{i} + 0,57\vec{j}$
2. a) $C_x = 4 \text{ cm}$ $C_y = -7 \text{ cm}$; b) $\vec{C} = (4; -7) \text{ cm}$; c) $C = 8,1 \text{ cm}$
 d) $S29,74^\circ\text{E}$; e) $\alpha = 60,24^\circ$ $\beta = 150,28^\circ$; f) $\vec{U}_C = 0,50\vec{i} - 0,87\vec{j}$
3. a) $D_y = 12,5 \text{ km}$; b) $\vec{D} = (6,3; 12,5) \text{ km}$; c) $N26,75^\circ\text{E}$
 d) $\alpha = 63,25^\circ$ $\beta = 26,75^\circ$; e) $\vec{D} = (6,3\vec{i} + 12,5\vec{j}) \text{ km}$; f) $\vec{U}_D = 0,45\vec{i} - 0,89\vec{j}$
4. a) $F_x = -8 \text{ cm}$ $F_y = -4 \text{ cm}$; b) $F = 8,94 \text{ cm}$; c) $S63,43^\circ\text{O}$
 d) $\alpha = 153,49^\circ$ $\beta = 116,57^\circ$; e) $\vec{F} = (-8\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ cm}$; f) $\vec{U}_F = 0,90\vec{i} - 0,45\vec{j}$
5. a) $G = 25,46 \text{ kgf}$; b) $G_x = -18 \text{ kgf}$; c) $\vec{G} = (-18; -18) \text{ kgf}$

- d) SO; e) $\alpha = 135^\circ$ $\beta = 135^\circ$; f) $\vec{U}_G = -0,71\vec{i} - 0,71\vec{j}$
6. a) $\alpha = 72^\circ$ $\beta = 18^\circ$; b) $B = 148,46$ m/s; c) $B_y = 141,57$ m/s
d) $\vec{B} = (46; 141,57)$ m/s; e) $\vec{B} = 46\vec{i} + 141,57\vec{j}$; f) $\vec{U}_B = 0,31\vec{i} + 0,95\vec{j}$
7. a) $m = 0,940$; b) $\alpha = 70^\circ$ $\beta = 160^\circ$; c) $\vec{H} = (4,10\vec{i} - 11,28\vec{j})$ m
d) $H_x = 4,10$ m $H_y = -11,28$ m; e) $\vec{H} = (4,10; -11,28)$ m; f) S19,97°E
8. a) $C_x = 57,02$ kgf; b) $\vec{C} = (57,02; 42,3)$ kgf; c) N53,43°E
d) $\alpha = 36,6^\circ$ $\beta = 53,4^\circ$; e) $\vec{C} = (57,02\vec{i} + 42,3\vec{j})$ kgf; f) $\vec{U}_C = 0,8\vec{i} + 0,6\vec{j}$
9. a) $\alpha = 55^\circ$ $\beta = 145^\circ$; b) $F_x = 43$ cm $F_y = 61,4$ cm; c) $\vec{F} = (43; 61,4)$ cm
d) S35°E; e) $\vec{F} = (43\vec{i} + 61,4\vec{j})$ cm; f) $\vec{U}_F = 0,57\vec{i} - 0,82\vec{j}$
10. a) $\vec{U}_E = 0,423\vec{i} - 0,906\vec{j}$; b) $\vec{E} = (12,69\vec{i} - 27,18\vec{j})$ m
c) $E_x = 12,69$ m $E_y = -27,18$ m; d) $\vec{E} = (12,69; -27,18)$ m; e) S25°E

Ejercicio 4.

1. $\Delta r = 3$ m 2. $\vec{\Delta r} = (7,8 \text{ km}; 52^\circ)$
3. a) $\vec{R} = (10,85 \text{ m}; 43^\circ)$; b) $\vec{R} = (3,5 \text{ m}; 193^\circ)$; c) $(1,13\vec{i} + 1,65\vec{j})$ m
4. $A_x = 0$, $A_y = -8$ m; $B_x = 7,5$ m, $B_y = 13$ m; $C_x = -10,9$ m,
 $C_y = -5,07$ m; $D_x = -7,99$ m, $D_y = 6,02$ m
5. a) $\vec{R} = (9,01 \text{ m}; 33,7^\circ)$; b) $\vec{R} = (22,3 \text{ m}; 250,3^\circ)$
6. $\vec{R} = (1190 \text{ N}; 76,4^\circ)$
7. $\vec{R} = (7,8 \text{ km}; 52^\circ)$

8. $\vec{R} = (5,06 \text{ km}; 69,8^\circ)$

9. a) $\vec{R} = (2,48 \text{ cm}; 18,3^\circ)$; b) $\vec{R} = (4,10 \text{ cm}; 83,7^\circ)$

10. a) $(-25\vec{i} - 114\vec{j}) \text{ m}$; b) $-2\,438,4\vec{k}$; c) $A = 2\,438,4 \text{ m}^2$

11. a) $(8,82\vec{i} + 3,81\vec{j}) \text{ m}$; b) $-20,35 \text{ m}^2$; c) $(-1,83\vec{i} - 3,62\vec{j}) \text{ m}$; d) $151,9^\circ$

12. a) 3,31 y 5,4; b) $(7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k})$; c) $17,15 \text{ u}^2$

Ejercicio 5.

1. a) $\vec{r}_A = (4\vec{i} - 5\vec{j}) \text{ m}$, $\vec{r}_B = (8\vec{i} - 3\vec{j}) \text{ m}$; b) $\vec{r}_{A/B} = (12\vec{i} - 8\vec{j}) \text{ m}$;
c) $d_{A/B} = 14,42 \text{ m}$

2. a) $\vec{r}_A = (\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ m}$, $\vec{r}_B = (-5\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m}$, $\vec{r}_C = (-4\vec{i} - 3\vec{j}) \text{ m}$; b) $p = 20,03 \text{ m}$

c) $A = 36,03^\circ$ $B = 97,12^\circ$ $C = 46,85^\circ$

3. a) $A_x = -7 \text{ m}$ $A_y = 2 \text{ m}$; b) $A = 7,28 \text{ m}$; c) $\vec{U}_A = -0,96\vec{i} + 27\vec{j}$;
d) $N74,05^\circ O$

4. a) $F_x = 21,65 \text{ N}$ $F_y = 12,5 \text{ N}$; b) $F_y = 12,5 \text{ N}$

5. a) $\vec{r}_{R/Q} = (-82,85\vec{i} + 131,61\vec{j}) \text{ km}$; b) $d_{R/Q} = 155,52 \text{ km}$

6. a) $\vec{r}_{M/C} = (-28\vec{i} + 45,3\vec{j}) \text{ km}$; b) $d_{M/C} = 53,25 \text{ km}$; $\theta = 153,55^\circ$

7. S no es subespacio de $\mathbb{R}^2$

8. W es subespacio de $\mathbb{R}^2$

9. W es subespacio de $\mathbb{R}^3$

10. S no es subespacio de $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 6.

1. $t = 6,18 \text{ s}$
2. $d = 3\,240 \text{ km}$
3. $t = 20 \text{ min.}$
4. $v_{\text{med-x}} = 1,2 \text{ cm/s}$
5. $v_x = 40 \text{ m/s}$
6. $v_{\text{med-x}} = 197,3 \text{ m/s}$
7. $t = 1 \text{ h y } 10 \text{ min}$
8. $t = 5 \text{ h y } 15 \text{ min.}$
9. $t = 1,41 \text{ h}$ (cuándo), $x = 7,05 \text{ km}$ (dónde)
10. $a_{\text{med-x}} = 1 \text{ m/s}^2$
11. $a_{\text{med-x}} = -2 \text{ m/s}^2$
12. $x = 74 \text{ km}$

Ejercicio 7.

1. $d = 70 \text{ m}$
2. $d = 250 \text{ m}$
3. $v_f = 120 \text{ m/s}$, $d = 1\,800 \text{ m}$
4. a) $d = 933,33 \text{ m}$; b) $v_f = 76,67 \text{ m/s}$
5. a) MRUA; b) $v_o = 4 \text{ m/s}$; c) $v_f = 16 \text{ m/s}$; $a = 2 \text{ m/s}^2$
6. a) $v_o = 0,17 \text{ m/s}$
7. $v_f = 28 \text{ m/s}$
8. a) $a = 0,20 \text{ m/s}^2$; b) $d = 1\,440 \text{ m}$
9. $v_f = -98 \text{ m/s}$
10. $v_f = -44,27 \text{ m/s}$, $t = 4,52 \text{ s}$
11. a) $v_f = -98 \text{ m/s}$; b) 490 m debajo del origen.
12. a) $h_{\text{max}} = 52,24 \text{ m}$; b) $t = 6,52 \text{ s}$
13. $v_f = -29,4 \text{ m/s}$ y $44,1 \text{ m}$ debajo del origen
14. $v_f = -78,4 \text{ m/s}$
15. $v_f = -11,88 \text{ m/s}$, $t = 1 \text{ s}$

Ejercicio 8.

1. $\vec{a} = (0,70\vec{i} - 1,04\vec{j}) \text{ m/s}^2$

2. $v_f = 260,92 \text{ km/h}$

3. $(1,2; 6,54) \text{ m}$, $d = 6,65 \text{ m}$

4. a) $\vec{a} = (-5,17\vec{i} - 4,17\vec{j}) \text{ m/s}^2$; b) $\vec{v}_{\text{med}} = (-31\vec{i} - 25\vec{j}) \text{ m/s}$;

c) $v_{\text{med}} = 39,82 \text{ m/s}$; d) $\vec{\Delta r} = (-372,24\vec{i} - 300,24\vec{j}) \text{ m}$; e) $d = 478,23 \text{ m}$

5. a) $t = 11,63 \text{ s}$; b) $\vec{\Delta r} = (-81,15\vec{i} - 101,44\vec{j}) \text{ m}$;

c) $\vec{v}_f = (-13,96\vec{i} - 17,45\vec{j}) \text{ m/s}$; d) $\vec{v}_{\text{med}} = (-6,98\vec{i} - 8,73\vec{j}) \text{ m/s}$;

e) $v_{\text{med}} = 11,18 \text{ m/s}$

6. a) $\vec{v}_f = (-5,06\vec{i} + 3,79\vec{j}) \text{ m/s}$; b) $t = 2,64 \text{ s}$; c) $\vec{\Delta r} = (-12\vec{i} + 9\vec{j}) \text{ m}$;

d) $\vec{v}_{\text{med}} = (-4,5\vec{i} + 3,4\vec{j}) \text{ m/s}$; e) $v_{\text{med}} = 5,64 \text{ m/s}$

7. a) $t = 41,22 \text{ s}$; b) $\vec{v}_{\text{med}} = (19\vec{i} - 11,5\vec{j}) \text{ m/s}$; c) $v_{\text{med}} = 22,21 \text{ m/s}$;

d) $d = 1037,35 \text{ m}$; e) $\vec{\Delta r} = (810\vec{i} - 648,03\vec{j}) \text{ m}$

8. a) $\vec{a} = (0,69\vec{i} + 0,89\vec{j}) \text{ m/s}^2$; b) $\vec{v}_o = (3,06\vec{i} + 3,95\vec{j}) \text{ m/s}$;

c) $\vec{v}_f = (9,91\vec{i} + 12,81\vec{j}) \text{ m/s}$; d) $\vec{a} = (6,49\vec{i} + 8,38\vec{j}) \text{ m/s}^2$;

e) $v_{\text{med}} = 10,6 \text{ m/s}$

9. a) $\vec{\Delta r} = (30\vec{i} - 40\vec{j}) \text{ m}$; b) $d = 154,04 \text{ m}$; c) $\vec{v}_{\text{med}} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ m/s}$;

d) $\vec{v}_f = (21\vec{i} - 28\vec{j}) \text{ m/s}$

10. a) $\vec{a} = (0,69\vec{i} + 0,89\vec{j}) \text{ m/s}^2$; b) $\vec{v}_o = (3,06\vec{i} + 3,95\vec{j}) \text{ m/s}$;

c) $\vec{v}_f = (9,91\vec{i} + 12,81\vec{j}) \text{ m/s}$; d) $\vec{v}_{\text{med}} = (6,49\vec{i} + 8,38\vec{j}) \text{ m/s}$;

e) $v_{\text{med}} = 10,6 \text{ m/s}$

Ejercicio 9.

1. $x = 0,74 \text{ m}$

2. $x = 1\,956,25 \text{ m}$

3. $t = 3,12 \text{ s}$

4. $v = 3,23 \text{ m/s}$

5. $t = 0,53 \text{ s}$

6. a) $h = 705,6 \text{ m}$; b) $x = 600 \text{ m}$

7. a) $\vec{r} = (2,94\vec{i} - 1,2\vec{j}) \text{ m}$; b) $\vec{v} = (6\vec{i} - 4,8\vec{j}) \text{ m/s}$

8. a) $v_{ox} = 12 \text{ m/s}$ $v_{oy} = 9 \text{ m/s}$; b) $t = 0,9 \text{ s}$; c) $h_{\text{max}} = 4,1 \text{ m}$;

d) $x = 21,6 \text{ m}$

9. a) $\vec{r} = (2,4\vec{i} - 1,15\vec{j}) \text{ m}$; b) $\vec{v} = (5\vec{i} - 4,7\vec{j}) \text{ m/s}$

10. $t = 0,35 \text{ s}$; b) $\vec{v} = (3,2\vec{i} - 3,43\vec{j}) \text{ m/s}$

Ejercicio 10.

1. $\omega = 1,96 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$

2. a) $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$; b) $v = 0,2 \text{ cm/s}$

3. $d = 691,15 \text{ m}$

4. a) $\omega = 1\,047 \text{ rad/s}$; b) $T = 6 \times 10^{-3} \text{ s}$; c) $f = 166,67 \text{ Hz}$

5. a) $T = 0,14 \text{ s}$; b) $f = 7 \text{ Hz}$; c) $\omega = 43,98 \text{ rad/s}$; d) $v = 15,39 \text{ m/s}$;

e) $v = 8,8 \text{ m/s}$

6. a) $\omega = 0,21 \text{ rad/s}$; b) $v = 0,84 \text{ m/s}$

7. a) $T = 86\,400 \text{ s}$; b) $\omega = 7,27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$; c) $v = 4\,631 \text{ m/s}$

8. a) $\omega = 1\,256,6 \text{ rad/s}$; b) $a_c = 4,74 \times 10^5 \text{ m/s}^2$
9. a) $f = 0,25 \text{ Hz}$; b) $T = 4 \text{ s}$; c) $\omega = 1,57 \text{ rad/s}$
10. a) $T = 30 \text{ s}$; b) $s = 628,32 \text{ m}$; c) $v = 20,94 \text{ m/s}$; d) $a_c = 4,38 \text{ m/s}^2$;
e) $\omega = 0,21 \text{ rad/s}$
11. a) $\omega = 0,28 \text{ rad/s}$; b) $v = 0,50 \text{ m/s}$; c) $T = 22,44 \text{ s}$; d) $f = 0,045 \text{ Hz}$;
e) $a_c = 0,14 \text{ m/s}^2$
12. a) $\omega = 43,46 \text{ rad/s}$; b) $T = 0,14 \text{ s}$; c) $a_c = 2\,266,53 \text{ m/s}^2$;
d) $\Delta\theta = 217,3 \text{ rad}$; e) $n = 34,58 \text{ rev}$

Ejercicio 11.

1. $\alpha = 1\,794,3 \text{ rad/s}^2$ 2. $\Delta\theta = 229,6 \text{ rad}$ 3. $\alpha = 50,2 \text{ rad/s}^2$
4. $\omega = 34 \text{ rad/s}$ 5. $\omega = 180 \text{ rad/s}$ 6. $\alpha = -0,94 \text{ rad/s}^2$
7. a) $\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$; b) $\omega_f = 10,43 \text{ rad/s}$
8. a) $\omega_f = 70 \text{ rad/s}$; b) $\Delta\theta = 480 \text{ rad}$
9. a) $\omega_f = 2\,094,4 \text{ rad/s}$; b) $\alpha = 261,8 \text{ rad/s}^2$
10. a) $\omega_f = 0,05 \text{ rad/s}$; b) $\omega_m = 0,025 \text{ rad/s}$; c) $\alpha = 0,002 \text{ rad/s}^2$
11. a) $\omega_f = 523,6 \text{ rad/s}$; b) $\omega_m = 261,8 \text{ rad/s}$; c) $\alpha = 52,36 \text{ rad/s}$;
d) $\Delta\theta = 2\,618 \text{ rad}$; e) $s = 3\,141,6 \text{ rad}$
12. a) $v_0 = 28,28 \text{ m/s}$; b) $\omega_f = 261,8 \text{ rad/s}$; c) $\alpha = 2,73 \text{ rad/s}^2$;

d) $\Delta\theta = 12\,470,4$ rad; e) $n = 1\,984,72$ rev; f) $s = 22\,446,72$ m

Ejercicio 12.

1. $F = 18\,200$ N 2. $a = 2,47$ m/s² 3. $m = 80,65$ kg

4. $W = 764,4$ N

5. a) $a = 0,43$ m/s²; b) $v_0 = 28,17$ m/s

6. a) $\vec{a} = (-0,26\vec{i} - 0,29\vec{j})$ m/s²; b) $\vec{F} = (-390\vec{i} - 435\vec{j})$ N

7. $W = 539$ N 8. $W = 29,2$ N 9. $N = 245$ N

10. $F = 123,48$ N 11. $a = 0,35$ m/s²

12. a) $3\,920$ N; b) $\mu = 0,15$

13. $F = 12,29$ N y $F = 54,08$ N

14. a) $F = 26,85$ N; b) $2,65$ m/s²

15. a) $a = 4,9$ m/s²; b) A hacia arriba y B hacia abajo; c) $T = 39,2$ N

d) $v_f = 19,6$ m/s

Ejercicio 13.

1. $F = 8,61 \times 10^{-8}$ N 2. $m = 11,24$ kg 3. $d = 1,33$ m

4. $d = 22,37$ cm 5. $m = 6,25$ kg 6. $F = 19,6$ N

7. $d = 1,76 \times 10^{-3}$ m 8. $F = 3,71 \times 10^{-7}$ N 9. $m = 10,79$ kg

10. $d = 1,51 \times 10^{-3}$ m

Ejercicio 14.

1. $F_N = 33,62 \text{ N}$
2. $F_N = 250 \text{ N}$
3. $T_1 = 73,41 \text{ N}$ y $T_2 = 97,43 \text{ N}$
4. $T_A = 233,35 \text{ N}$, $T_B = 132,32 \text{ N}$ y $T_C = 300 \text{ N}$
5. $T_1 = 40 \text{ N}$ y $T_2 = 34,64 \text{ N}$
6. $F_W = 25,2 \text{ N}$
7. $T_1 = 314,96 \text{ N}$ y $T_2 = 375,36 \text{ N}$
8. $\mu_c = 0,4$
9. $F = 0,59 \text{ N}$
10. $T_1 = 490 \text{ N}$, $T_2 = 246,1 \text{ N}$ y $T_3 = 445,8 \text{ N}$

Ejercicio 15.

1. $W = 30 \text{ N}$
2. $F = -114,3 \text{ N}$
3. $\tau = 5,7 \text{ N.m}$
4. $\tau = -150 \text{ N.m}$
5. $\tau = 4,8 \text{ N.m}$
6. $\tau = 3,09 \text{ N.m}$
7. $\tau = 0,16 \text{ N.m}$
8. $\tau = 50 \text{ N.m}$
9. $\tau = -21,1 \text{ N.m}$
10. $F_1 = 212,5 \text{ N}$ y $F_2 = 437,5 \text{ N}$

Ejercicio 16.

1. $W = 60 \text{ J}$
2. $W = 88,2 \text{ J}$
3. $W = 18\,000\,000 \text{ J}$
4. $W = 49\,000 \text{ J}$
5. $W = 662,2 \text{ J}$
6. $W = -30 \text{ J}$
7. $W = 23,52 \text{ J}$
8. $W = -9,47 \text{ J}$
9. $W = 96\,432 \text{ J}$
10. $W_1 = 25,98 \text{ J}$, $W_2 = \text{No desarrolla trabajo}$ $W_3 = 15 \text{ J}$.

Ejercicio 17.

1. $E_C = 555\,444,45 \text{ J}$
2. $m = 5,56 \text{ kg}$
3. $E_C = 2\,250 \text{ J}$
4. $v = 4,64 \text{ m/s}$
5. $E_C = 57\,396,9 \text{ J}$
6. $E_p = 3,92 \text{ J}$

7. $h = 4,8 \text{ m}$, el auto se encuentra segundo piso 8. $m = 18,03 \text{ kg}$

9. $E_p = 30,87 \text{ J}$ por encima de la mesa y $E_p = 44,1 \text{ J}$ a partir del piso

10. $E_m = 936 \text{ J}$ 11. $P = 16,7 \text{ Watts}$ 12. $W = 720\,000 \text{ J}$

13. $t = 3,25 \text{ s}$ 14. $P = 222\,240 \text{ watts}$ y $P = 297,9 \text{ hp}$.

15. $F = 2\,611 \text{ N}$

BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez, M. et al. (2011). Manual de laboratorio Física General. México: Universidad de Sonora.
- Baing, A.; Agustench, M. (2007). La revolución científica de los siglos XVI y XVII. Madrid, Alhambra.
- Bedford, A.; Fowler, W. (1996). Mecánica para ingeniería. México: Addison-Wesley Longman.
- Bueche, J. (2015). Física general. Décima edición. México: McGraw-Hill.
- Burbano, S.; Burbano, E.; García, C. (2004). Física general. 32ª Edición. Madrid: Editorial Tébar.
- Cromer, A. (2008). Física para las ciencias de la vida. México: Reverté.
- Cuéllar, C. (2013). Física 1. México: McGraw Hill.
- Del Valle, J. (2012). Álgebra Lineal para estudiantes. México: McGraw-Hill.
- Eisberg, L. (1983). Física. Fundamentos y Aplicaciones. España: Editorial McGraw-Hill.

- French, A. (1998). *Mecánica newtoniana*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Gettys, W.; Keller, F.; Skove, J. (1991). *Física Clásica y Moderna*. Editorial McGraw-Hill.
- Goldemberg, J. (2010). *Física general y experimental. Volumen 1*. México: Editorial Interamericana.
- Gutiérrez A. (2010). *Física I. Enfoque por competencias*. Segunda edición. México: Mc Graw Hill.
- Hewitt, P. (2008). *Física conceptual*. México D.F., Addison Wesley Longman de México.
- Jackson, H.; Wirtz, G. (2009). *Estática y resistencia de materiales*. México: McGraw-Hill.
- Pérez, H. (2013). *Física 1. Segunda edición*. México: Grupo Editorial Patria.
- Serway, A.; Jewett, J. (2005). *Física para ciencias e ingeniería*. Séptima edición. México: McGraw Hill.
- Tipler, A. (1998). *Física 1. Tercera edición*. España: Editorial Reverte.
- Tippens, P. (2007). *Física I Conceptos y aplicaciones*. Séptima edición. México: McGraw Hill.

Vallejo, P. (2009). Física vectorial. Séptima Edición. Chile: Ediciones Rodin.

Young, H. Sears, C.; Zemansky, M.; (2009). Física universitaria. Decimosegunda Edición. México: Pearson educación.